

MATEMATIKA

1 – Integral

INTEGRAL TAK TENTU

1. $\int dx = x + c$
2. $\int d f(x) = f(x) + c$
3. $\int a dx = ax + c$
4. $\int x^n dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1} + c$ dengan $n \neq -1$
5. $\int a x^n dx = \frac{a}{n+1} x^{n+1} + c$ dengan $n \neq -1$
6. $\int (ax + b)^n dx = \frac{(ax + b)^{n+1}}{a(n+1)} + c$ dengan $a \neq 0$

Sifat – sifat Integral

1. $\int k f(x) dx = k \int f(x) dx$
2. $\int (f(x) \pm g(x)) dx = \int f(x) dx \pm \int g(x) dx$
3. $\int k(f(x) \pm g(x)) dx = k \int f(x) dx \pm k \int g(x) dx$

INTEGRAL TERTENTU

$$\int_a^b f(x) dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

$F(x)$ = adalah anti turunan $f(x)$
 a = batas bawah
 b = batas atas

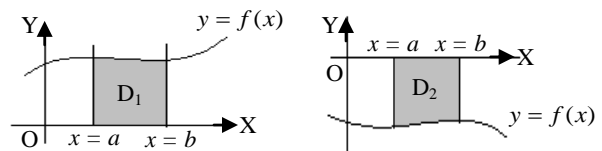
Sifat – sifat Integral Tertentu

1. $\int_a^b k dx = k(b-a)$
2. $\int_a^a U dx = 0$ $a \leq b \leq c$
3. $\int_a^b k U dx = k \int_a^b U dx$
4. $\int_a^b U dx = - \int_b^a U dx$
5. $\int_a^b U dx + \int_b^c U dx = \int_a^c U dx$
6. $\int_a^b (U \pm V) dx = \int_a^b U dx \pm \int_a^b V dx$

k = konstanta
 U = fungsi $f(x)$
 V = fungsi $g(x)$

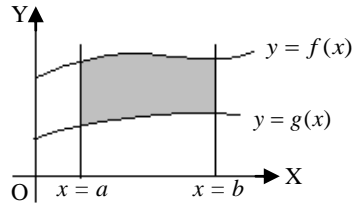
LUAS BIDANG DATAR

♣ Dibatasi Oleh Kurva dan Sumbu X



1. $L(D_1) = \int_a^b f(x) dx$
2. $L(D_2) = - \int_a^b f(x) dx = \int_b^a f(x) dx = \left| \int_a^b f(x) dx \right|$

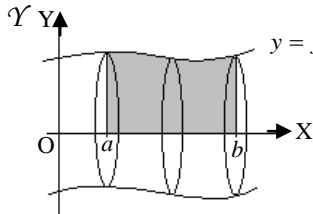
♣ Luas Antara Dua Kurva



$$L = \int_a^b \{f(x) - g(x)\} dx$$

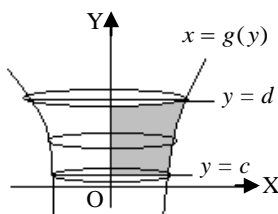
VOLUME BENDA PUTAR

♣ Mengelilingi Sumbu X



$$V = \pi \int_a^b \{f(x)\}^2 dx$$

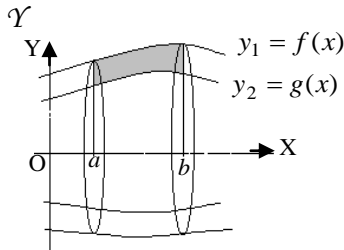
♣ Mengelilingi Sumbu Y



$$V = \pi \int_c^d \{g(y)\}^2 dy$$

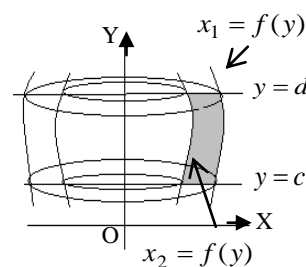
Volum Benda Putar Suatu Daerah Antara Dua Kurva

♣ Mengelilingi Sumbu X



$$V = \pi \int_a^b \{f^2(x) - g^2(x)\} dx$$

♣ Mengelilingi Sumbu Y



$$V = \pi \int_c^d \{f^2(y) - g^2(y)\} dy$$

PENGINTEGRALAN DENGAN SUBSTITUSI

1. $\int a u^n dx = \frac{a}{n+1} u^{n+1} + C$; a & n bilangan rasional $n \neq -1$
2. $\int \cos u du = \sin u + C$
3. $\int \sin u du = -\cos u + C$
4. $\int \sec^2 u du = \tan u + C$
5. $\int \cos ec^2 u du = -\cot au + C$
6. $\int \tan u \sec u du = \sec u + C$
7. $\int \cot au \cos ec u du = -\cos ec u + C$

INTEGRAL SUBSTITUSI TRIGONOMETRI

Fungsi Integral	Substitusi Dgn	Hasil Substitusi
$\sqrt{a^2 - x^2}$	$x = a \sin \theta$	$a\sqrt{1 - \sin^2 \theta} = a \cos \theta$
$\sqrt{a^2 + x^2}$	$x = a \tan \theta$	$a\sqrt{1 + \tan^2 \theta} = a \sec \theta$
$\sqrt{x^2 - a^2}$	$x = a \sec \theta$	$a\sqrt{\sec^2 \theta - 1} = a \tan \theta$

INTEGRAL PARSIAL

$$\int u dv = u \cdot v - \int v du$$

Hal yang perlu diperhatikan agar $\int u dv$ dapat diselesaikan adalah memilih bagian dv sehingga v dengan mudah dapat diperoleh melalui pengintegralan $v = \int dv$.

INTEGRAL FUNGSI TRIGONOMETRI

1. $\int \sin x \, dx = -\cos x + C$
2. $\int \cos x \, dx = \sin x + C$
3. $\int \sec^2 x \, dx = \tan x + C$
4. $\int \cos ec^2 x \, dx = -\cot x + C$
5. $\int \sec x \tan x \, dx = \sec x + C$
6. $\int \cos ecx \cot x \, dx = -\cos ecx + C$
7. $\int \sin(ax+b) \, dx = -\frac{1}{a} \cos(ax+b) + C$
8. $\int \cos(ax+b) \, dx = \frac{1}{a} \sin(ax+b) + C$
9. $\int \sec^2(ax+b) \, dx = \frac{1}{a} \tan(ax+b) + C$
10. $\int \cos ec^2(ax+b) \, dx = -\frac{1}{a} \cot(ax+b) + C$
11. $\int \tan(ax+b) \sec(ax+b) \, dx = \frac{1}{a} \sec(ax+b) + C$
12. $\int \cot(ax+b) \cos ec(ax+b) \, dx = -\frac{1}{a} \cos ec(ax+b) + C$

Latihan 1

1. Selesaikan tiap integral berikut ini!

- a. $\int 5x^4 \, dx$ c. $\int \sqrt[4]{x^3} \, dx$
- b. $\int \frac{1}{x^3} \, dx$ d. $\int \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} \, dx$

2. Tentukan tiap integral berikut ini!

- a. $\int (8x^3 - 3x^2 + 4) \, dx$
- b. $\int (x-1)^2 \, dx$
- c. $\int (12x^{11} - 4x^7 + 10x^4) \, dx$
- d. $\int (x+1)(x-3) \, dx$

3. Selesaikan tiap integral berikut ini!

- a. $\int 4x \left(\frac{1}{x} - 2x \right) \, dx$
- b. $\int x(x+1)^2 \, dx$
- c. $\int \left(x + \frac{1}{x} \right)^2 \, dx$
- d. $\int \frac{x^5 - 1}{x^2} \, dx$

4. Selesaikan integral – integral berikut ini!

- a. $\int \sqrt{x} (2x-1) \, dx$ c. $\int \frac{x(x-1)}{\sqrt{x}} \, dx$
- b. $\int \frac{x^2 - 1}{\sqrt{x}} \, dx$ d. $\int \left(\sqrt{x} - \frac{1}{x} \right)^2 \, dx$

5. Misalkan $F'(x) = 2x + 3$ dan $F(1) = 14$, tentukan fungsi $F(x)$!

6. Diketahui $F'(x) = 3x^2 - 4x + 4$. Untuk $x = 2$ fungsi $F(x)$ bernilai 13. Tentukan fungsi $F(x)$!

7. Misalkan turunan kedua dari fungsi $F(x)$ adalah $F''(x) = 12x + 2$. Jika $F'(2) = 20$ dan $F(1) = 4$, carilah fungsi $F(x)$!

8. Diketahui $F''(x) = 6x$ merupakan turunan kedua dari $F(x)$. Untuk $x = 1$ fungsi $F(x)$ bernilai -2 , sedangkan untuk $x = -1$ fungsi $F(x)$ bernilai -6 . Tentukan fungsi $F(x)$!

9. Gradien garis singgung di setiap titik $P(x, y)$ yang terletak pada sebuah kurva adalah $\frac{dy}{dx} = 2x$. Jika

kurva itu melalui titik $(-1, 2)$, tentukan persamaannya.

10. Turunan kedua dari suatu persamaan kurva ditentukan oleh $y'' = 6x + 8$. Kurva tersebut

melalui titik $(1, 6)$ dan gradien garis singgungnya sama dengan 7. Tentukan persamaan kurva tersebut.

11. Sebuah benda bergerak dengan laju v m/det. Pada saat t detik laju benda dinyatakan dengan persamaan $v = 10 - t$. Pada saat $t = 2$ detik posisi benda berada pada jarak 30 m dari titik asal. Tentukan posisi benda s sebagai fungsi waktu t !

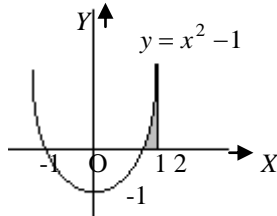
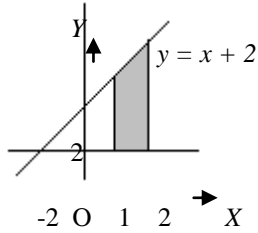
12. Sebuah bola bergulir pada sebuah bidang datar dengan laju awal 4 m/det. Akibat gesekan dengan bidang itu, bola mengalami perlambatan 2 m/det². Jika saat $t = 0$ posisi benda berada pada $s = 0$, berapa jarak yang ditempuh bola dari awal sampai berhenti.

13. Kurva $y = f(x) = x^2 + 1$ didefinisikan dalam interval $[-1, 2]$. Interval ini dibagi menjadi 6 sub-interval, masing – masing dengan panjang yang sama. Titik x_i merupakan titik tengah dari sub-interval ke i . Hitunglah jumlah Riemannya!

14. Tunjukkan luas daerah tertutup yang dinyatakan oleh tiap rumus berikut:

- a. $\int_0^3 x \, dx$ b. $\int_0^2 (x+2) \, dx$
- c. $\int_1^2 x^2 \, dx$ d. $\int_1^2 (x-1)^2 \, dx$

15. Tuliskan rumus integral untuk menyatakan luas daerah yang diarsir pada gambar berikut ini:



16. Dengan menggunakan hubungan

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i) \Delta x_i, \text{ hitunglah}$$

integral tertentu $\int_0^3 x dx$.

17. Hitunglah tiap integral tertentu berikut:

a. $\int_0^3 x dx$ b. $\int_1^3 4 dx$
 c. $\int_0^5 x dx$ d. $\int_0^2 (x+1) dx$
 e. $\int_2^3 (x-2) dx$

18. Hitunglah nilai dari tiap integral tertentu berikut:

a. $\int_0^1 4x dx$ b. $\int_1^3 (x-1)^2 dx$
 c. $\int_1^3 \frac{1}{x^2} dx$ d. $\int_1^4 \sqrt{x} dx$

17. Hitunglah nilai tiap integral tertentu berikut:

a. $\int_1^1 (x^2 - 1) dx$ b. $\int_1^3 (x^2 - 1) dx$
 c. $\int_3^1 (x^2 - 1) dx$

18. Hitunglah nilai tiap integral tertentu berikut:

a. $\int_0^2 4x^3 dx$ b. $4 \int_0^3 x^3 dx$

19. Hitunglah nilai tiap integral tertentu berikut:

a. $\int_0^4 3x^2 dx$ b. $\int_0^1 3x^2 dx$
 c. $\int_1^4 3x^2 dx$

22. Hitunglah luas daerah yang dibatasi oleh:

a. kurva $y = f(x) = 2x$, sumbu X , dan garis – garis $x = 1$ dan $x = 2$.
 b. kurva $y = f(x) = 3x^2 + 6x$, sumbu X , dan garis – garis $x = 0$ dan $x = 2$.

23. Hitunglah luas daerah yang dibatasi oleh:

a. kurva $y = f(x) = 2x - 4$, sumbu X , dan garis – garis $x = 0$ dan $x = 2$.
 b. kurva $y = f(x) = x^2 - 2x$, dan sumbu X .

24. Hitunglah luas daerah yang dibatasi oleh kurva

$y = f(x) = x^3 - x$ dan sumbu X .

25. Tentukan luas daerah yang dibatasi oleh kurva $y = x$ dan kurva $y = 3x$ dalam interval $1 \leq x \leq 2$!

26. Hitunglah luas daerah yang dibatasi oleh kurva $y = x$, kurva $y = 3x$, dan garis $x = 2$.

27. Tentukan luas daerah yang dibatasi oleh kurva parabola $y = 2 - x^2$ dan garis $y = x$.

28. Tentukan luas daerah yang dibatasi oleh kurva parabola $y^2 = 4x$ dan garis $4x - 3y = 4$.

29. Daerah yang dibatasi oleh garis $y = x + 2$, sumbu X , $x = 0$, dan $x = 2$ diputar 360° mengelilingi sumbu X . Hitunglah volum benda putar yang terjadi.

30. Daerah yang dibatasi oleh parabola $y^2 = 4x$, sumbu X , dan garis $x = 4$ diputar mengelilingi sumbu X satu kali putaran. Tentukan volum benda yang terjadi.

31. Daerah yang dibatasi oleh lingkaran $x^2 + y^2 = 4$ di kuadran pertama, sumbu X , sumbu Y , diputar mengelilingi sumbu X satu kali putaran. Hitunglah volum benda putar yang terjadi.

32. Daerah yang dibatasi oleh garis $y = 2x$, sumbu Y , $y = 1$, dan $y = 2$, diputar 360° mengelilingi sumbu Y . Hitunglah volum benda putar yang terjadi.

33. Hitunglah volum benda putar yang diperoleh jika daerah yang dibatasi oleh parabola $y^2 = 4x$, $y = 1$, dan $y = 4$ diputar 360° mengelilingi sumbu Y .

34. Hitunglah volume benda putar yang terjadi, jika daerah yang dibatasi oleh garis – garis $y = x$, $y = 2x$, $x = 1$, dan $x = 2$, diputar sejauh 360° mengelilingi sumbu X .

35. Tentukan volum benda putar yang diperoleh jika daerah yang dibatasi oleh kurva parabola $y = x^2 + 1$ dan $y = x + 3$, diputar mengelilingi sumbu X .

Latihan 2

- Jika $f(x) = \int (x^2 - 2x - 1) dx$ dan $f(1) = 0$, maka $f(x) = \dots\dots\dots$

A. $\frac{1}{3}x^3 - x^2 + x - \frac{1}{3}$
 B. $\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{3}$
 C. $\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{3}$
 D. $\frac{1}{3}x^3 + x^2 - x - \frac{1}{3}$
 E. $\frac{1}{3}x^3 + 2x^2 - 2x - \frac{1}{3}$
- Hasil dari $\int \left(\sqrt{x} - \frac{1}{x}\right)^2 dx$ adalah.....

A. $\frac{x^3 - 8x\sqrt{x-1}}{2x} + C$
 B. $\frac{x^2 - 8x\sqrt{x-1}}{2x} + C$
 C. $\frac{x^3 - 4\sqrt{x-2}}{4x} + C$
 D. $\frac{x^2 - 4\sqrt{x-2}}{4x} + C$
 E. $\frac{x^2 - 4x\sqrt{x-2}}{4x} + C$
- Diketahui $f(x) = \int_c^x t^2 dt$. Jika $f(2) = -19/3$, maka kurva itu memotong sumbu x pada.....

A. (0, 0) D. (3, 0)
 B. (1, 0) E. (19/3, 0)
 C. (2, 0)
- Sebuah benda bergerak dengan laju awal 4 m/det dan perlambatan 2 m/det. Benda tersebut berhenti.....

A. 1 meter dari titik awal
 B. 2 meter dari titik awal
 C. 3 meter dari titik awal
 D. 4 meter dari titik awal
 E. 5 meter dari titik awal
- Nilai dari $\int_1^2 \left(t^2 - \frac{1}{t^2}\right) dt$ adalah.....

A. $\frac{537}{20}$ D. $\frac{540}{20}$
 B. $\frac{538}{20}$ E. $\frac{541}{20}$
 C. $\frac{539}{20}$
- Jika $y = \frac{1}{3}\left(x^3 + \frac{3}{x}\right)$, maka $\int_1^2 \sqrt{4 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx = ..$

A. 13/6 D. 16/3
 B. 14/6 E. 17/6
 C. 15/6
- $\int \frac{1}{(2x-3)^4} dx$ adalah.....

A. $\frac{1}{6}(2x-3)^{-3} + C$ D. $\frac{1}{(2x-3)^{-3}} + C$
 B. $-\frac{1}{6}(2x-3)^{-3} + C$ E. $(3x-3)^{-3} + C$
 C. $(2x-3)^{-3} + C$
- Turunan kedua fungsi $f(x)$ adalah $f''(x) = 6x + 8$. Garis singgung kurva fungsi $f(x)$ di titik (1, 6) adalah

7. Fungsi $f(x)$ tersebut adalah.....

A. $y = x^3 + 4x^2 - 4x + 4$
 B. $y = x^3 + 4x^2 - 4x + 2$
 C. $y = x^3 + 4x^2 - 4x + 5$
 D. $y = x^3 + 4x^2 - 4x + 3$
 E. $y = x^3 + 4x^2 - 4x + 1$
- Luas daerah yang dibatasi kurva $y = x^2 - 2x + 1$, sumbu X, dan $x = 2$ jika dinyatakan dalam notasi integral adalah.....

A. $\int_0^2 (x^2 - 2x + 1) dx$ D. $\int_{-2}^2 (x^2 - 2x + 1) dx$
 B. $\int_1^2 (x^2 - 2x + 1) dx$ E. $\int_{-3}^2 (x^2 - 2x + 1) dx$
 C. $\int_{-1}^2 (x^2 - 2x + 1) dx$
- Luas daerah yang dibatasi $y = x^3 - x$ dalam interval $0 \leq x \leq 1$ dengan $y = 0$ adalah.....satuan luas

A. 1 D. 1/4
 B. 1/2 E. 1/5
 C. 1/3
- Luas daerah yang dibatasi $y^2 = 4x$ dengan $x = 1/4$ adalah.....satuan

A. 1/6 D. 1/3
 B. 1/5 E. 1/2
 C. 1/4
- Luas daerah yang dibatasi oleh garis $y = 2x$, garis $x = -2$, garis $x = 2$ dan sumbu x adalah.....

A. 4 satuan luas D. 10 satuan luas
 B. 6 satuan luas E. 12 satuan luas
 C. 8 satuan luas
- Luas daerah yang dibatasi oleh parabola $y = 3x^2 + 4x + 1$, sumbu x dan garis $x = 2$ sama dengan.....

A. 18 D. $9\frac{4}{27}$
 B. 9 E. $18\frac{4}{27}$
 C. $18\frac{2}{27}$

14. Luas daerah yang dibatasi oleh kurva $y = 2x - x^2$, sumbu x , dan garis $x = 3$ sama dengan.....
 A. 8 D. $\frac{4}{3}$
 B. 4 E. 0
 C. $\frac{8}{3}$
15. Luas daerah di kuadran I yang dibatasi oleh kurva $y = 6 + 5x - x^2$, garis $y = 4x$ dan sumbu y adalah.....
 A. $11\frac{1}{3}$ D. $13\frac{1}{2}$
 B. $2\frac{1}{2}$ E. $15\frac{2}{3}$
 C. $24\frac{5}{6}$
16. Volum benda putar yang terjadi jika daerah yang dibatasi $y = x + 2$, sumbu Y , dan sumbu X diputar mengelilingi sumbu X sejauh 360° adalah.....satuan isi.
 A. $\frac{55}{3}\pi$ C. $\frac{53}{3}\pi$ E. $\frac{51}{3}\pi$
 B. $\frac{54}{3}\pi$ D. $\frac{52}{3}\pi$
17. Daerah yang dibatasi oleh garis $y = 3x - 1$, $x = 1$, dan $x = 2$ diputar mengelilingi sumbu x sejauh 360° , maka isi benda putar adalah.....
 A. 10π D. 13π
 B. 11π E. 15π
 C. 12π
18. Daerah yang dibatasi oleh $y = x^2$ dengan sumbu x untuk $0 \leq x \leq 2$ diputar mengelilingi sumbu x sejauh 360° , maka isi benda putar yang terjadi sama dengan.....
 A. $5,2\pi$ D. $7,2\pi$
 B. $6,4\pi$ E. $8,4\pi$
 C. $6,8\pi$
19. Daerah yang dibatasi oleh kurva $y = x^2$ dan $y = 2x + 3$ diputar mengelilingi sumbu x sejauh 360° maka isi benda putar.....
 A. $60\frac{1}{2}\pi$ D. $72\frac{8}{15}\pi$
 B. $65\frac{2}{3}\pi$ E. $72\frac{1}{15}\pi$
 C. $70\frac{1}{4}\pi$
20. Luas daerah yang dibatasi $y = x^2$ dan $y = x$ diputar mengelilingi sumbu X sejauh 360° , maka isi benda putar yang terjadi sama dengan.....
 A. $\frac{2}{15}\pi$ D. $\frac{7}{15}\pi$
 B. $\frac{4}{15}\pi$ E. $\frac{9}{15}\pi$
 C. $\frac{6}{15}\pi$

2 – Program Linier

Suatu permasalahan dikatakan permasalahan program linier, jika memenuhi :

- Tujuan (objektif) permasalahan yang akan dicapai dalam bentuk program linier $ax + by = z$.
- Memiliki alternative pemecahan yang membuat nilai fungsi tujuan menjadi optimum.
- Sumber-sumber yang tersedia dalam jumlah yang terbatas dan pembatasan-pembatasan dari sumber yang tersedia dinyatakan dalam bentuk pertidaksamaan linier.

Permasalahan program linier secara umum dapat dirumuskan :

- a. Permasalahan program linier maksimasi
 - Fungsi objektif maksimum : $z = ax + by$
 - Syarat :
 $c_i x + d_i y \leq e_i, i = 1, 2, \dots, n. x \geq 0, y \geq 0$
- b. Permasalahan program linier minimasi
 - Fungsi objektif minimum : $z = ax + by$
 - Syarat :
 $c_i x + d_i y \geq e_i, i = 1, 2, \dots, n. x \geq 0, y \geq 0$

Nilai optimum(memaksimalkan/meminimumkan) dari masalah program linier, dapat diketahui dengan cara menentukan titik pojok dari daerah hmpunan penyelesaian sistem persamaan yang ada.

Cara menentukan nilai optimum fungsi objektif (fungsi tujuan) :

- a. Dengan metode uji titik pojok
Mencari titik-titik pojok (ekstrim) dari kendala lalu mensubsitusikan ke bentuk fungsi objektif $z = f(x, y) = ax + by$. Nilai terbesar merupakan nilai maksimum dan nilai z yang terkecil merupakan nilai minimum.
- b. Dengan garis selidik
 - (i) Gambar garis $ax + by = ab$ yang memotong sumbu X di titik $(b, 0)$ dan memotong sumbu Y di titik $(0, a)$.
 - (ii) Tarik garis sejajar dengan $ax + by = ab$ hingga nilai z maksimum atau minimum, dengan memperhatikan hal-hal berikut :
 - Jika garis $ax + by = k_1$ sejajar $ax + by = ab$ dan berada di paling atas atau paling kanan pada daerah himpunan penyelesaian, maka $z = k_1$ merupakan nilai maksimumnya.
 - Jika garis $ax + by = k_2$ sejajar $ax + by = ab$ dan berada di paling bawah atau paling kiri pada daerah himpunan penyelesaian, maka $z = k_2$ merupakan nilai minimumnya

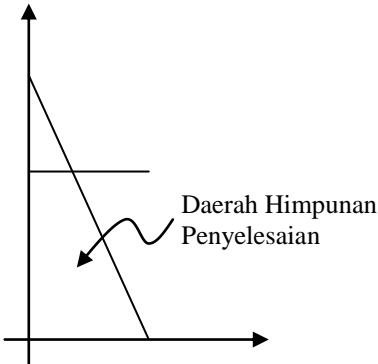
Latihan

1. Gambarkan pada bidang Cartesius, himpunan penyelesaian dari pertidaksamaan – pertidaksamaan (x dan $y \in R$)
 - a. $x + 2y < 4$
 - b. $x + 2y \leq 4$
 - c. $2x + y > 6$
 - d. $2x + y \geq 6$
2. Tunjukkan pada bidang Cartesius, daerah himpunan penyelesaian dari tiap sistem pertidaksamaan linear berikut ini.
 - a. $x \geq 0$ dan $y \geq 0$, dan $4x + 5y \leq 0$, untuk x dan $y \in R$
 - b. $x \geq 5$ dan $y \geq 5$, dan $x + y \leq 12$, untuk x dan $y \in R$
3. Mas Boi membeli 6 buku tulis dan 8 pensil disuatu toko buku. Untuk itu mas Boi harus membayar Rp 6.900,00. Sedangkan si Iteung hanya membeli buku tulis dan pensil masing – masing sebuah. Untuk itu ia harus membayar Rp 1.050,00. Kalau harga sebuah buku tulis dan sebuah pensil masing – masing x rupiah dan y rupiah, buatlah model matematika untuk persoalan itu.
4. Seorang siswa memilih jurusan IPA, jika memenuhi syarat – syarat sebagai berikut.
 - a. Jumlah Nilai Matematika dan Fisika tidak kurang dari 12.
 - b. Nilai masing – masing mata pelajaran itu tidak boleh kurang dari 5

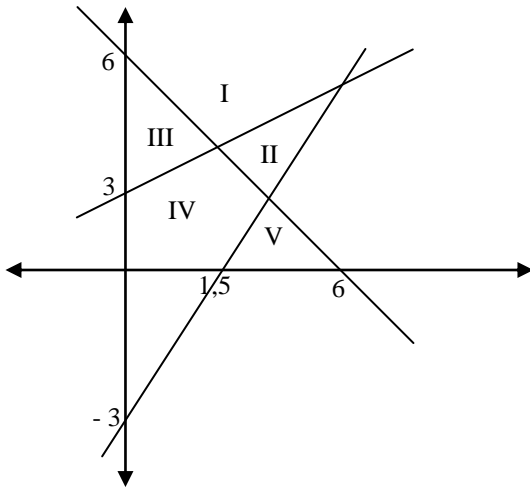
Buatlah model matematika yang dapat dipakai sebagai patokan agar seseorang siswa boleh memilih jurusan IPA.
8. Sebuah tempat parkir paling banyak hanya dapat ditempati oleh 200 mobil sedan. Jika tempat itu dipakai untuk parkir bis, maka 1 bis akan menempati luas daerah yang sama jika dipakai parkir untuk 5 mobil sedan. Jika ditempat itu diparkir x bis dan y mobil sedan, tentukan model matematikanya.
9. Sebuah industri kecil memproduksi dua jenis barang A dan B dengan memakai dua mesin M_1 dan M_2 . Untuk membuat barang A, mesin M_1 beroperasi selama 2 menit dan mesin M_2 beroperasi selama 4 menit. Sedangkan untuk membuat barang B, mesin M_1 beroperasi selama 8 menit dan mesin M_2 beroperasi selama 4 menit. Mesin M_1 dan M_2 masing – masing beroperasi tidak lebih dari 8 jam tiap hari. Keuntungan bersih untuk tiap barang A adalah Rp 250,00 dan tiap barang B adalah Rp 500,00. Buatlah model matematika untuk masalah untuk program linear itu, kalau keuntungan bersih yang diharapkan sebesar – besarnya.

- a. 60
- b. 40
- c. 36
- d. 20
- e. 16

4.



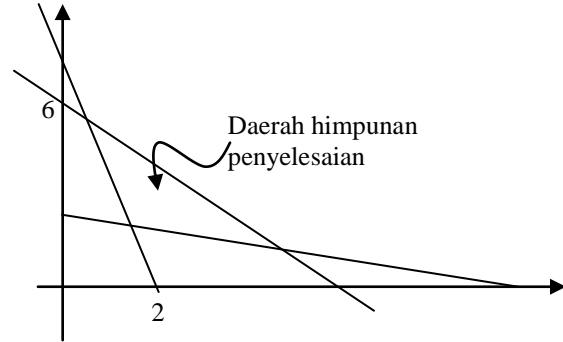
- a. $2x + y \leq 4, y \leq 3, x \geq 0,$
 - b. $2x - y \leq 4, y \leq 3, x \geq 0, y \geq 0$
 - c. $2x + y \geq 4, y \leq 3, x \geq 0, y \geq 0$
 - d. $x + y \leq 4, x \leq 3, x \geq 0, y \geq 0$
 - e. $x - y \leq 4, y \leq 3, x \geq 0, y \geq 0$
5. Daerah yang memenuhi penyelesaian dari:



$x + y > 6$
 $2x - y < 3$
 $x - 2y + 6 < 0$ adalah....

- a. I
 - b. II
 - c. III
 - d. IV
 - e. V
6. Jika diketahui bahwa $P = x + y$ dan $Q = 5x + y$ maka nilai maksimum dari P dan Q pada sistem pertidaksamaan $x \geq 0, y \geq 0, x + 2y \leq 12,$ dan $2x + y \leq 12$ adalah...
- a. 8 dan 30
 - b. 6 dan 6
 - c. 4 dan 6
 - d. 6 dan 24
 - e. 8 dan 24

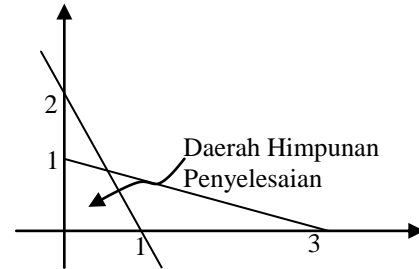
7.



Koordinat titik – titik didalam gambar dan sepanjang sisi segitiga ABC dalam gambar di atas, memenuhi pertidaksamaan...

- a. $4x + y \geq 8, 3x + 4y \leq 24, x + 6y \geq 12$
 - b. $4x + y \geq 8, 4x + 3y \leq 24, 6x + y \geq 12$
 - c. $x + 4y \geq 8, 3x + 4y \leq 24, x + 6y \geq 12$
 - d. $4x + y \leq 8, 3x + 4y \geq 24, 6x + y \leq 12$
 - e. $x + 4y \geq 8, 3x + 4y \geq 24, x + 6y \geq 12$
8. Nilai maksimum $f(x, y) = 3x + 4y$ didaerah yang diarsir adalah...

- a. 4
- b. $4\frac{1}{2}$
- c. 5
- d. 6
- e. $6\frac{1}{2}$

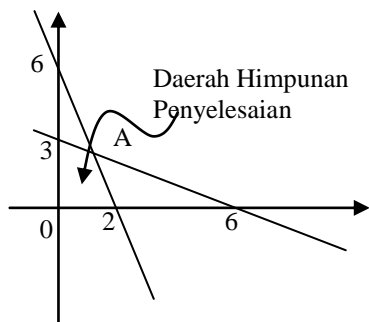


9. Untuk (x, y) yang memenuhi pertidaksamaan $2x + 3y \geq 6; 5x + 2y \geq 10; x \geq 0, y \geq 0,$ nilai maksimum obektif $f(x, y) = x + 2y$ adalah...
- a. 3
 - b. 7
 - c. 16
 - d. 11
 - e. tidak ada
10. Suatu jenis roti I membutuhkan 100 gram tepung dan 25 gram mentega, roti jenis II membutuhkan 50 gram tepung dan 50 gram mentega. Tersedia tepung 1,5 kg dan mentega 1 kg. Jika x banyak roti I dan y banyak roti II, supaya kita dapat membuat roti sebanyak mungkin dari 2 jenis roti itu, maka pertidaksamaan dalam x dan y yang memenuhi syarat tersebut adalah...
- a. $2x + y \leq 20, x + 2y \leq 60$
 - b. $4x + y \leq 60, x + y \leq 20$
 - c. $2x + y \leq 30, 2x + 3y \leq 60$
 - d. $x + 2y \leq 20, 2x + 3y \leq 40$
 - e. $2x + y \leq 30, x + 2y \leq 40$

11. Himpunan penyelesaian dari sistem pertidaksamaan $2x + y \leq 40$, $x + 2y \leq 40$, $x \geq 0$, $y \geq 0$ terletak pada daerah berbentuk..

- a. trapesium
- b. persegi panjang
- c. segitiga
- d. segiempat
- e. segilima

12. Daerah yang diarsir adalah gambar himpunan penyelesaian suatu program linear. Untuk soal ini mana saja bentuk – bentuk dibawah ini mencapai maksimum di A.

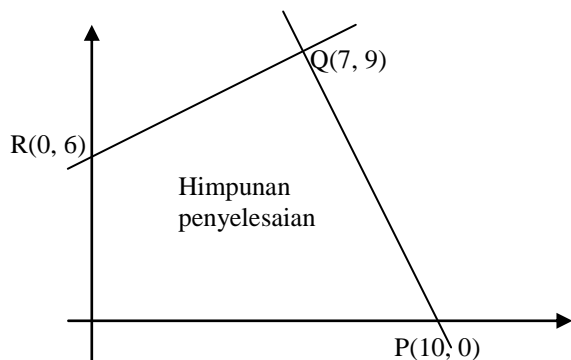


- (1) $100x + 50y$
- (2) $-4x - 4y$
- (3) $3x + 3y$
- (4) $8x + 2y$

Jawaban yang benar adalah...

- a. (1), (2), dan (3)
- b. (1) dan (3)
- c. (2) dan (4)
- d. (4) saja
- e. semua benar

13. Jika segiempat OPQR merupakan himpunan penyelesaian program linear, maka maksimum fungsi sasaran $x - y$ pada tiap titik adalah...



- a. (0, 0)
- b. (0, 6)
- c. (7, 9)
- d. (10, 0)
- e. semua salah

14. Seorang penjaja buah – buahan yang menggunakan gerobak menjual apel dan pisang. Harga pembelian apel adalah Rp1.000,00 tiap kg dan pisang adalah Rp4.000,00 tiap kg. Modalnya hanya Rp25.000,00 dan muatan gerobaknya tidak melebihi 400kg. Jika keuntungan tiap kg apel 2 kali keuntungan tiap kg pisang, maka untuk memperoleh keuntungan sebesar mungkin pada setiap pembelian, pedagang itu harus membeli...

- a. 250 kg apel saja

- b. 400 kg pisang saja
- c. 170 kg apel dan 200 kg pisang
- d. 100 kg apel dan 300 kg pisang
- e. 150 kg apel dan 250 kg pisang

15. Rokok A yang harganya Rp 200,00 perbungkus dijual dengan laba Rp40,00 per bungkus sedangkan rokok B yang harganya Rp100,00 perbungkus dijual dengan laba Rp30,00 perbungkus. Seorang pedagang rokok yang mempunyai modal Rp80.000,00 dan kiosnya maksimum dapat menampung 500 bungkus rokok, akan memperoleh keuntungan sebesar – besarnya jika ia membeli...

- a. 300 bks rokok A dan 200 bks rokok B
- b. 200 bks rokok A dan 300 bks rokok B
- c. 250 bks rokok A dan 250 bks rokok B
- d. 100 bks rokok A dan 400 bks rokok B
- e. 400 bks rokok A dan 100 bks rokok B

16. Seorang pengusaha roti membuat dua jenis roti. Setiap roti jenis I memerlukan 100 gram tepung dan 75 gram mentega, sedangkan setiap roti jenis II memerlukan 50 gram tepung dan 75 gram mentega. Tepung yang tersedia adalah 30 kg. Banyaknya roti jenis I dan II masing – masing agar diperoleh laba sebesar – besarnya adalah...

- a. 100 dan 300 buah
- b. 200 dan 200 buah
- c. 150 dan 250 buah
- d. 350 dan 250 buah
- e. 175 dan 225 buah

17. Diberikan sistem pertidaksamaan linear berikut ini:

$$\begin{cases} x + y \geq 6 \\ 2x + 3y \geq 30 \\ x \geq 0, y \geq 0; x, y \in R \end{cases}$$

Bentuk objektif $P = 150x + 100y$

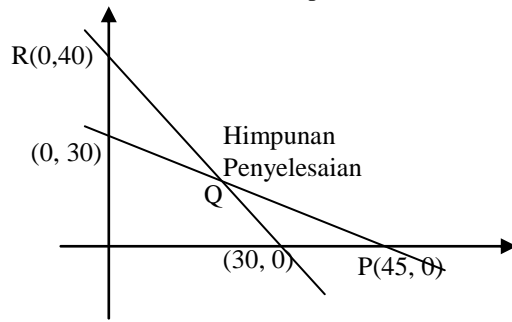
$$P_{\min} : P_{\max} = \dots$$

- a. 1 : 5
- b. 2 : 5
- c. 3 : 5
- d. 4 : 5
- e. 1 : 3

18. Sebuah kapal pesiar dapat menumpang 150 orang penumpang. Setiap penumpang kelas utama boleh membawa 60 kg bagasi dan penumpang kelas ekonomi 40 kg. Kapal itu hanya dapat membawa 8000 kg bagasi. Jika banyak penumpang kelas utama x dan banyaknya penumpang kelas ekonomi y , maka sistem pertidaksamaan yang harus dipenuhi adalah...

- a. $x + y \leq 150$, $3x + 2y \leq 800$, $x \geq 0$, $y \geq 0$
- b. $x + y \leq 150$, $3x + 2y \leq 400$, $x \geq 0$, $y \geq 0$
- c. $x + y \geq 150$, $3x + 2y \leq 400$, $x \geq 0$, $y \geq 0$
- d. $x + y \leq 150$, $3x + 3y \leq 400$, $x \geq 0$, $y \geq 0$
- e. $x + y \leq 150$, $3x + 3y \leq 800$, $x \geq 0$, $y \geq 0$

19. Daerah yang diarsir adalah gambar himpunan penyelesaian suatu masalah program linear. Bentuk – bentuk dibawah ini mencapai minimum di Q.



- (1) $x + 3y$ (3) $x + 4y$
 (2) $2x + 5y$ (4) $3x + y$

Pernyataan yang benar adalah...

- a. (1), (2), dan (3) d. (4) saja
 b. (1) dan (3) e. semuanya benar
 c. (2) dan (4)
20. Seorang penjahit membuat dua jenis pakaian untuk dijual. Pakaian jenis I memerlukan $1m^2$ katun dan $3m^2$ wool dan pakaian jenis II memerlukan $2m^2$ katun dan $2m^2$ wool. Bahan katun yang tersedia adalah $80m^2$ dan bahan wool yang tersedia $120m^2$. Apabila harga jual pakaian jenis I dan II masing – masing adalah Rp120.000,00 dan Rp60.000,00 dan ia memperoleh laba yang sebesar – besarnya, maka banyak pakaian jenis I adalah...
- a. 50 potong d. 20 potong
 b. 40 potong e. 10 potong
 c. 30 potong

3 – Matriks

Bentuk umum matriks :

$$A_{m \times n} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} \end{pmatrix} \begin{array}{l} \text{baris ke-1} \\ \text{baris ke-2} \\ \\ \text{baris ke-}i \end{array}$$

Kolom ke-1 Kolom ke-2 Kolom ke-*j*

Matriks A dapat ditulis sebagai $A = (a_{ij}), i = 1, 2, \dots, m$ dan $j =$

Ordo matriks = banyak baris \times banyak

Penjumlahan dan pengurangan dua matriks A dan B dapat dilakukan apabila :

- Ordo A = ordo B
- $A \pm B = (a_{ij}) \pm (b_{pq})$, untuk setiap $i = p$ dan $j = q$

Determinan Matriks

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

$$\det(A) = |A| = \Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \det A &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \\ &= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} \end{aligned}$$

Invers Matriks :

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

Sifat-sifat invers matriks :

- $(A^{-1})^{-1} = A$
- $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$
- $(AB)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$
- $(BA)^{-1} = A^{-1} \cdot B^{-1}$

Jika $AX = B$, maka $X = A^{-1}B$

Jika $XA = B$, maka $X = BA^{-1}$

Latihan

1. Diketahui matriks $A = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$ dan $A^2 = xA + yI$,

dengan x, y bilangan real dan I matriks identitas berordo 2. Nilai $x - y$ adalah

- a. 3 b. 4
c. 1 d. 5
e. 6

2. Diberikan dua matriks :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \text{ dan } B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Matriks C yang memenuhi $ABC = I$, dengan I matriks identitas adalah

- a. $\frac{1}{4} \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$
b. $\frac{1}{12} \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$
c. $\frac{1}{6} \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$
d. $\frac{1}{12} \begin{pmatrix} 4 & -4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$
e. $\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$

3. Matriks $A = \begin{pmatrix} -1 & \frac{1}{2} \\ 4m & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 6m & -4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, dan $C =$

$\begin{pmatrix} 1 & 8m \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$. Jika $A^2 + B^{-1} = C$, maka nilai m yang memenuhi adalah

- a. -2 b. $-\frac{1}{6}$
c. $\frac{1}{2}$ d. 2
e. 6

4. Nilai $x^2 + 2xy + y^2$ yang memenuhi persamaan :

$$\begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \end{pmatrix} \text{ adalah } \dots$$

- a. 9 b. 7
c. 5 d. 3
e. 1

5. Diketahui matriks : $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \end{bmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix}$

z), dan $B = \begin{pmatrix} 5 & 8 & 7 \end{pmatrix}$. Jika $AX^t = B^t$, maka nilai $2x + y + z = \dots$

- a. 42 b. -29
c. -24 d. -32
e. -3

6. Diberikan : $\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 & 3 \\ 9 & 7 \end{pmatrix}$. Nilai $(a + b + c + d) = \dots$

- a. 6 b. 7
c. 8 d. 9
e. 10

7. Jika $\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$, maka nilai $x + 2y =$

-
a. 2 b. 3 c. 4 d. 5 e. 6

8. Matriks N berordo (2×2) yang memenuhi

persamaan : $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} N = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, adalah

- a. $\begin{pmatrix} -6 & -5 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$
b. $\begin{pmatrix} 5 & -6 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$
c. $\begin{pmatrix} -6 & -5 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$
d. $\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$
e. $\begin{pmatrix} 12 & 10 \\ -10 & -8 \end{pmatrix}$

9. Himpunan penyelesaian SPLTV adalah (x, y, z) .

$$\begin{cases} \frac{x}{3} + \frac{y}{2} - z = 7 \\ \frac{x}{4} - \frac{3y}{2} - \frac{z}{2} = -6 \\ \frac{x}{6} - \frac{y}{4} - \frac{z}{3} = 1 \end{cases}$$

Nilai $x - y - z$ dari SPLTV di atas adalah

- a. 7 b. -4
c. -1 d. -7
e. -13

10. Jika $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ dan $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$

. Maka $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \dots$

- a. $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$
b. $\begin{pmatrix} 6 & -6 \\ 5 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$
c. $\begin{pmatrix} -4 & 13 \\ 7 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$
d. $\begin{pmatrix} 9 & -1 \\ 13 & -12 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$
e. $\begin{pmatrix} 1 & -5 \\ -4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$

11. Jika $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$ dan $AB^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$, maka $A = \dots$

a. $\begin{pmatrix} 5 & 9 \\ 13 & 23 \end{pmatrix}$

b. $\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 9 & 23 \end{pmatrix}$

c. $\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 9 & 13 \end{pmatrix}$

d. $\begin{pmatrix} 9 & 5 \\ 12 & 3 \end{pmatrix}$

e. $\begin{pmatrix} 9 & 13 \\ 2 & 23 \end{pmatrix}$

12. Jika $N = B^3$ dengan $B = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{3} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\sqrt{3} \end{pmatrix}$, maka N

$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \dots$

a. $\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix}$

b. $\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

c. $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$

d. $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

e. $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

13. Jika $\begin{pmatrix} 4^{x+2y} & 0 \\ 2 & 3x-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}$, maka nilai

$2\sqrt{x+y} = \dots$

a. $\frac{9}{4}$

b. $\frac{9}{2}$

c. 3

d. 9

e. 18

14. Jika $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$ dan $f(x) = x^2 + 2x$, maka $f^2(A) =$

.....

a. $11 A^2$

b. $11 A$

c. $11 I$

d. $121 A$

e. $121 I$

15. Jika $M = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$, maka determinan dari $(M$

$)^2$ adalah

a. $\frac{1}{2}\sqrt{2}$

b. $\sqrt{2}$

c. 2

d. $2\sqrt{2}$

e. $4\sqrt{2}$

16. Diberikan matriks-matriks berikut ini :

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & -5 \\ -3 & 4 & -1 & 7 \end{pmatrix}; C = \begin{pmatrix} a & b \\ d & e \\ f & g \end{pmatrix}$

. Carilah transpos dari setiap matriks itu.

17. Diberikan matriks $A = \begin{pmatrix} x & 9 \\ 2y & 3z \end{pmatrix}$ dan $B =$

$\begin{pmatrix} 4z-6y & 4x+2 \\ 2x+y & 2y+14 \end{pmatrix}$. Jika $A = B^t$, tentukanlah

nilai $x, y,$ dan z ?

18. Tentukan nilai $a, b, c,$ dan d dari persamaan matriks berikut ini

$\begin{pmatrix} a-b & b+c \\ 3d+c & 2a-4d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 1 \\ 7 & 6 \end{pmatrix}$

19. Tentukanlah himpunan penyelesaian dari SPLTV berikut ini.

a. $\begin{cases} 10x+3y=49 \\ 3x-5y=-3 \end{cases}$

b. $\begin{cases} x-y+z=3 \\ x+2y+3z=20 \\ 2x+3y-4z=-3 \end{cases}$

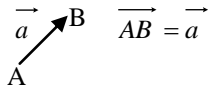
20. Uang Yuda, Laras, dan Dinda semuanya adalah Rp 1.000.000,-. Uang Laras dan Dinda bersama-sama Rp 155.000,- krangnya dari 2 kali uang Yuda, sedangkan jumlah uang Yuda dan Dinda adalah Rp 126.000,- lebih banyak dari uang Laras. Carilah besar uang mereka masing-masing?

4 - Vektor

♣ **Definisi Vektor**

Vektor adalah besaran yang mempunyai besar (panjang) dan arah

♣ **Cara Penulisan**



Vektor kolom $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$

Vektor Baris $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$

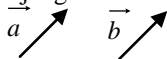
♣ **Vektor Nol ($\vec{0}$)**

Vektor nol adalah suatu vektor yang panjangnya nol dan arahnya sembarang.

Sifat : $\vec{a} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{a} = \vec{a}$

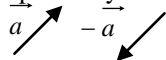
♣ **Kesamaan Vektor**

Dua vektor disebut sama jika panjang sama dan arahnya sama. $\vec{a} = \vec{b}$



♣ **Invers Suatu Vektor**

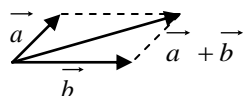
Invers vektor \vec{a} adalah vektor yang panjang/besarnya sama dengan \vec{a} , tetapi arahnya berlawanan



Penjumlahan dan Pengurangan Vektor

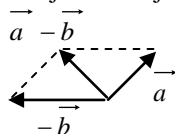
♣ **Penjumlahan**

Metode Segitiga Metode Jajaran Genjang



♣ **Pengurangan**

Metode Segitiga Metode Jajaran Genjang



Sifat – sifat Penjumlahan Vektor

- $\vec{a} + \vec{b} = \vec{v}$: tertutup
- $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$: komutatif
- $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$
bersifat asosiatif

- $\vec{a} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{a}$: identitas
- $\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}$: Invers

Perkalian Vektor dengan Suatu Bilangan (skalar)

Mis: \vec{a} = vektor, k = bilangan real, \vec{c} = hasil kali bilangan real dengan \vec{a} $\vec{c} = k\vec{a}$

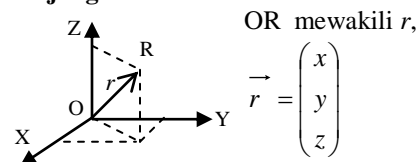
Panjang \vec{c} : $|\vec{c}| = |k| |\vec{a}|$, jika $k > 0$ \vec{c} searah dengan \vec{a} , jika $k < 0$ \vec{c} berlawanan arah dengan \vec{a} , jika $k = 0$ $\vec{c} = \vec{0}$

Sifat – sifat Perkalian Vektor dengan Bilangan Real

\vec{a}, \vec{b} = vektor dan m, n = bilangan real

- $|m\vec{a}| = |m| |\vec{a}|$
- $m\vec{a} = \vec{a} m$
- $(m+n)\vec{a} = m\vec{a} + n\vec{a}$
- $m(-\vec{a}) = -m\vec{a}$
- $(mn)(\vec{a}) = m(n\vec{a})$
- $m(\vec{a} + \vec{b}) = m\vec{a} + m\vec{b}$

Panjang Vektor



Panjang vektor r , $|\vec{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

Jarak Dua Titik

$A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$, AB mewakili vector

$\begin{pmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \\ z_2 - z_1 \end{pmatrix}$. Jarak AB adalah :

$|\vec{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$

Vektor Posisi

Misal titik A (x, y, z) .

Vektor posisi dari titik A adalah suatu vektor a yang titik awalnya di $O(0, 0)$ dan titik ujungnya di (x, y, z) .

Misal A (x_1, y_1, z_1) dan B (x_2, y_2, z_2) . Vektor posisi AB

adalah $\vec{AB} = \begin{pmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \\ z_2 - z_1 \end{pmatrix}$

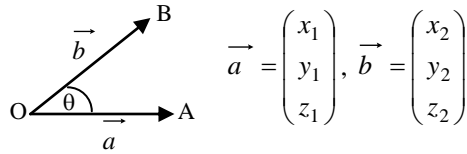
Perbandingan Ruas Garis di R-3D dalam bentuk koordinat

A (x₁, y₁, z₁) dan B (x₂, y₂, z₂)

$$x_p = \frac{mx_2 + nx_1}{m+n}, \quad y_p = \frac{my_2 + ny_1}{m+n},$$

$$z_p = \frac{mz_2 + nz_1}{m+n}.$$

Perkalian Skalar dua Vektor



$$\vec{a} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \theta$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2$$

Sudut yang Dibentuk oleh Dua Vektor

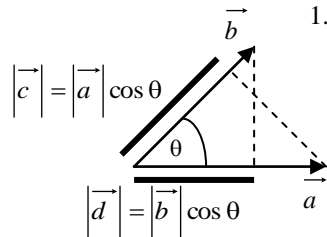
$$\cos \theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2}{\sqrt{(x_1^2 + y_1^2 + z_1^2)} \sqrt{(x_2^2 + y_2^2 + z_2^2)}}$$

- i. jika $\vec{a} \cdot \vec{b} > 0$ maka θ lancip ($0 < \theta < 90$)
- ii. jika $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ maka $\theta = 90^\circ$ (Teorema Ortogonalisis)
- iii. jika $\vec{a} \cdot \vec{b} < 0$ maka θ tumpul ($90 < \theta < 180$)
- iv. jika $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}|$ maka $\theta = 0$ (berimpit/sejajar)
- v. jika $\vec{a} \cdot \vec{b} = -|\vec{a}| |\vec{b}|$ maka $\theta = 180$ (berlawanan arah)

Sifat – sifat Perkalian Skalar Dua Vektor

- 1. $\vec{a} \cdot \vec{b} = c$, c adalah skalar (tidak tertutup)
- 2. $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$ (komutatif)
- 3. $\vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}|^2$
- 4. $\vec{a} \cdot \vec{a} = 0 \leftrightarrow \vec{a} = 0$
- 5. $k(\vec{a} \cdot \vec{b}) = (k\vec{a}) \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot (k\vec{b}) = k\vec{a} \cdot \vec{b}$
- 6. $\vec{a} \cdot (\vec{b} \pm \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} \pm \vec{a} \cdot \vec{c}$ (distributif)
- 7. $(\vec{a} \cdot \vec{b}) \cdot \vec{c} \neq \vec{a} \cdot (\vec{b} \cdot \vec{c})$ (tidak assosiatif)

Proyeksi Skalar Ortogonal (hasilnya sebuah skalar)



- 1. Proyeksi skalar a pada b adalah panjang scalar a di proyeksikan ke b, yaitu

$$|\vec{c}| = |\vec{a}| \cos \theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|}$$

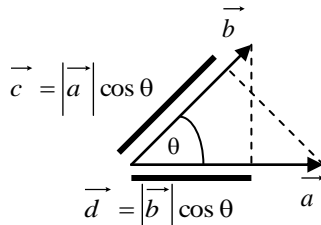
- 2. Proyeksi skalar b pada a adalah panjang scalar b

diproyeksikan ke a, yaitu $|\vec{d}|$

$$|\vec{d}| = |\vec{b}| \cos \theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}|}$$

Proyeksi Vektor Ortogonal (hasilnya sebuah vektor)

- 1. Proyeksi vektor \vec{a} pada \vec{b}
 - 2. Proyeksi vektor \vec{b} pada \vec{a}
- \vec{b} adalah vektor, yang panjangnya $|\vec{a}| \cos \theta$ dan searah dengan \vec{b} , yaitu \vec{c}
- \vec{a} adalah vektor, yang panjangnya $|\vec{b}| \cos \theta$ dan searah dengan \vec{a} , yaitu \vec{d}



$$\vec{c} = |\vec{a}| \cos \theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|^2} \vec{b}$$

$$\vec{d} = |\vec{b}| \cos \theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}|^2} \vec{a}$$

Perkalian Silang Dua Vektor

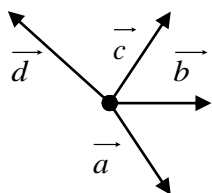
$$\vec{a} \times \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \sin \theta$$

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} \text{ dan } \vec{b} = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}$$

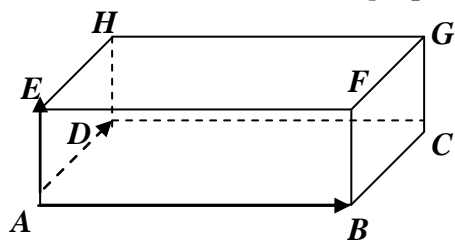
$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} i & x_1 & x_2 \\ j & y_1 & y_2 \\ k & z_1 & z_2 \end{vmatrix}$$

Latihan

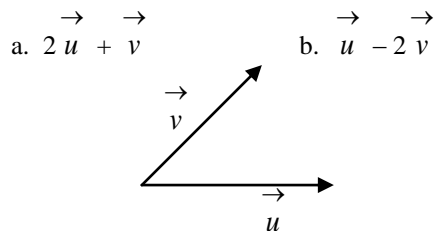
1. Empat vektor \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} , dan \vec{d} dilukiskan pada gambar dibawah ini. Gambarlah diagram vektor yang menunjukkan jumlah dari vektor – vektor \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} , dan \vec{d} atau $(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d})$



2. Misalkan balok ABCD.EFGH pada gambar di bawah ini, panjang $AB = 8$ cm, $AD = 6$ cm, dan $AE = 4$ cm. Ruas – ruas garis berarah \vec{AB} , \vec{AD} , dan \vec{AE} berturut – turut mewakili vektor \vec{p} , \vec{q} dan \vec{r} .



- a. Gambarlah diagram – diagram vektor berikut ini: (i). $\vec{p} + \vec{q}$ (iii). $\vec{p} + \vec{r}$ (ii). $\vec{q} + \vec{r}$ (iv). $\vec{p} + \vec{q} + \vec{r}$
- b. Hitunglah panjang atau besar vektor – vektor yang diperoleh pada soal a).
3. Vektor – vektor \vec{u} dan \vec{v} dilukiskan pada gambar dibawah ini. Gambarlah diagram vektor yang menunjukkan :



3. Misalkan A (3, -2) dan B (-1, 5). Jika vektor \vec{p} wakil dari ruas garis berarah \vec{AB} dan vektor \vec{q} wakil dari ruas garis berarah \vec{BA} , nyatakan vektor – vektor \vec{p} dan \vec{q} dalam vektor kolom.

4. Diketahui vektor – vektor $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$, dan $\vec{c} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

- a. Tentukan $\vec{a} + \vec{b}$ dan $\vec{b} + \vec{a}$
- b. Periksa apakah $\vec{a} + \vec{b}$ dan $\vec{b} + \vec{a}$
- c. Tentukan $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c}$ dan $\vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$
- d. Periksa apakah $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c}$ dan $\vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$

5. Diketahui vektor – vektor $\vec{p} = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{q} = \begin{pmatrix} -9 \\ 6 \end{pmatrix}$, dan $\vec{r} = \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \end{pmatrix}$.

Nyatakan vektor – vektor berikut dalam bentuk vektor kolom.

- a. $\frac{1}{2}\vec{p}$ b. $-\frac{1}{3}\vec{q}$
- c. $\frac{1}{4}\vec{r}$ d. $\frac{1}{2}\vec{p} - \frac{1}{3}\vec{q} + \frac{1}{4}\vec{r}$

6. Diketahui titik A (1, 7) dan titik B (4, 1). Titik C adalah sebuah titik pada garis hubung AB sehingga

$$\vec{AC} = \frac{1}{3}\vec{AB}.$$

- a. Tentukan vektor \vec{AB} dan \vec{AC}
- b. Tentukan koordinat titik C.

7. Diketahui vektor – vektor $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, dan $\vec{c} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix}$.

Hitunglah:

- a. $|\vec{a}|$ c. $|\vec{c}|$ e. $|\vec{a} - 2\vec{b} + \vec{c}|$
- b. $|\vec{b}|$ d. $|\vec{a} + \vec{b}|$ f. $|\vec{a} - \vec{b} + \vec{c}|$

8. Misalkan vektor $\vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix}$, carilah vektor satuan dari \vec{a} .

9. Diketahui vektor – vektor

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}, \text{ dan } \vec{c} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

- Tentukan $\vec{a} + \vec{b}$ dan $\vec{b} + \vec{b}$
- Periksa apakah $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$
- Tentukan $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c}$ dan $\vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$
- apakah $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c}$ dan $\vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$

9. Diketahui vektor – vektor

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} -6 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{v} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -6 \end{pmatrix}, \text{ dan } \vec{w} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

- Tentukanlah:
- $\frac{1}{3}\vec{u}$
 - $-\frac{1}{2}\vec{v}$
 - $\frac{1}{2}\vec{w}$
 - $\frac{1}{3}\vec{u} - \frac{1}{2}\vec{v} + \frac{1}{2}\vec{w}$

11. Diketahui tiga buah titik $A(3, 3, 2)$, $B(4, 5, 1)$, dan $C(7, 11, -2)$. Ruas – ruas garis berarah

\vec{OA} , \vec{OB} , dan \vec{OC} mewakili vektor \vec{a} , \vec{b} , dan \vec{c} .

- Nyatakan \vec{a} , \vec{b} , dan \vec{c} dalam vektor kolom.
- Nyatakan \vec{AB} , \vec{BC} , dan \vec{AC} dalam vektor kolom.
- Tunjukkan bahwa A , B , dan C segaris (kolinear).
- Tentukan perbandingan $AB : BC$

12. Diketahui titik $P(4, 1, -5)$ dan titik $Q(1, 7, -14)$. Titik R adalah titik pada garis hubung PQ sehingga

$$\vec{PR} = \frac{1}{3}\vec{PQ}.$$

- Tentukan vektor yang diwakili \vec{PQ} , \vec{PR}
- Tentukan koordinat titik R .

13. Diketahui vektor – vektor $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$,

$$\vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \text{ dan } \vec{c} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}.$$
 Hitunglah :

- $|\vec{a}|$
- $|\vec{b}|$
- $|\vec{c}|$
- $|\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}|$
- $|2\vec{a} - \vec{b} + \vec{c}|$
- $|\vec{a} + 2\vec{b} - \vec{c}|$

14. Misalkan segitiga ABC dengan titik – titik sudut $A(1, 1, 2)$, $B(3, 0, -1)$, dan $C(4, -4, 1)$. Dengan menggunakan rumus jarak, tunjukkan bahwa segitiga ABC merupakan segitiga siku – siku di B .

15. Tentukan persamaan bola yang pusatnya di titik $M(3, 4, 2)$ dan jari – jarinya 5.

16. Misalkan vektor $\vec{a} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}$, carilah vektor

satuan dari vektor \vec{a} .

5 – Transformasi Geometri

Pengertian

Transformasi T di bidang datar adalah suatu pemetaan titik di bidang yang sama. Jika titik (x, y) ditransformasikan menjadi (x', y') oleh transformasi T ,

maka ditulis $T : (x, y) \rightarrow (x', y')$. Transformasi demikian disebut transformasi Geometri.

Jenis Transformasi

1. Translasi

Translasi (pergeseran) adalah pemindahan suatu objek sepanjang garis lurus dengan arah dan jarak tertentu.

Matriks

Jika translasi $T = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ memetakan titik $P(x, y)$ ke

titik $P'(x', y')$, maka $x' = x + a$ dan $y' = y + b$ atau $P'(x + a, y + b)$ dapat dituliskan dalam bentuk:

$$T = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} : P(x, y) \rightarrow P'(x + a, y + b)$$

2. Refleksi

Refleksi (pencerminan) adalah suatu transformasi yang memindahkan setiap titik pada bidang dengan menggunakan sifat bayangan cermin dari titik – titik yang hendak dipindahkan itu.

No	Transformasi	Pemetaan	Matriks
1	Pencerminan terhadap sumbu X	$(x, y) \rightarrow (x, -y)$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$
2	Pencerminan terhadap sumbu Y	$(x, y) \rightarrow (-x, y)$	$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
3	Pencerminan terhadap garis $y = x$	$(x, y) \rightarrow (y, x)$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$
4	Pencerminan terhadap garis $y = -x$	$(x, y) \rightarrow (-y, -x)$	$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$
5	Pencerminan terhadap titik asal O	$(x, y) \rightarrow (-x, -y)$	$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

♣ Refleksi Titik Terhadap Garis $x = a$ dan $y = b$

(i) Titik $P(x, y)$ dicerminkan terhadap garis $x = a$, bayangannya adalah titik $P'(2a - x, y)$.

(ii) Titik $P(x, y)$ dicerminkan terhadap garis $y = b$, bayangannya adalah titik $P''(x, 2b - y)$.

♣ Refleksi Titik terhadap garis $y = mx$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 2\alpha & \sin 2\alpha \\ \sin 2\alpha & -\cos 2\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \text{ dengan } \tan \alpha = m$$

♣ Refleksi Titik terhadap garis $y = mx + n$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' - n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 2\alpha & \sin 2\alpha \\ \sin 2\alpha & -\cos 2\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y - n \end{pmatrix}$$

3. Rotasi

Rotasi (perputaran) pada bidang geometri ditentukan oleh titik pusat, besar sudut, dan arah sudut rotasi.

Suatu rotasi dikatakan memiliki arah positif, jika rotasi itu berlawanan arah dengan arah putaran jarum jam. Sedangkan rotasi dikatakan memiliki arah negatif, jika rotasi itu searah dengan arah putaran jarum jam.

♣ Rotasi terhadap Titik Pusat $O(0, 0)$

Jika titik $P(x, y)$ diputar sebesar α radian berlawanan arah dengan arah putaran jarum jam terhadap titik pusat O diperoleh bayangan $P'(x', y')$,

$$\text{maka : } x' = x \cos \alpha - y \sin \alpha$$

$$y' = x \sin \alpha + y \cos \alpha$$

♣ Rotasi terhadap Titik Pusat $A(a, b)$

Jika titik $P(x, y)$ diputar sebesar α radian berlawanan arah dengan arah putaran jarum jam terhadap titik pusat $A(a, b)$ dan diperoleh bayangan $P'(x', y')$, maka :

$$x' - a = (x - a) \cos \alpha - (y - b) \sin \alpha$$

$$y' - b = (x - a) \sin \alpha + (y - b) \cos \alpha$$

No	Transformasi	Pemetaan	Matriks
1	Rotasi terhadap titik asal $O(0, 0)$ sebesar $\frac{\pi}{2}$	$(x, y) \rightarrow (-y, x)$	$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$
2	Rotasi terhadap titik asal $O(0, 0)$ sebesar $-\frac{\pi}{2}$	$(x, y) \rightarrow (-y, -x)$	$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$
3	Rotasi terhadap titik asal $O(0, 0)$ sebesar π	$(x, y) \rightarrow (-x, -y)$	$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$
4	Rotasi terhadap titik asal $O(0, 0)$ sebesar α	$(x, y) \rightarrow (x', y')$ $x' = x \cos \alpha - y \sin \alpha$ $y' = x \sin \alpha + y \cos \alpha$	$\begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$

4. Dilatasi

Dilatasi (perbesaran atau perkalian) adalah suatu transformasi yang mengubah ukuran (memperbesar atau memperkecil suatu bangun, tetapi tidak mengubah bentuk bangun yang bersangkutan. Dilatasi ditentukan oleh titik pusat dan faktor skala dilatasi. Dilatasi yang berpusat di titik asal O dan di titik sebarang $P(x, y)$ dengan masing – masing faktor skala k dilambangkan berturut – turut dengan $[O, k]$ dan $[P, k]$.

- ♣ Dilatasi terhadap Titik Pusat $O(0, 0)$
Jika titik $P(x, y)$ didilatasikan terhadap titik pusat $O(0, 0)$, dengan faktor skala k didapat bayangan titik $P'(x', y')$ maka :

$$x' = kx$$

$$y' = ky$$

- ♣ Dilatasi terhadap Titik Pusat $A(a, b)$
Jika titik $P(x, y)$ didilatasikan terhadap titik pusat $A(a, b)$, dengan faktor skala k didapat bayangan titik $P'(x', y')$, maka :

$$x' = a + k(x - a)$$

$$y' = b + k(y - b)$$

Latihan

1. Tentukan bayangan dari titik – titik $P(1, 4)$, $Q(-1, 1)$, $R(2, -4)$, dan $S(-3, -1)$ oleh translasi $T = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.
2. Translasi T memetakan titik $A(1, -2)$ ke titik $A'(4, 3)$.
a. Tentukan translasi T itu.
b. Tentukan bayangan dari titik – titik $B(0, 3)$ dan $C(2, 6)$ oleh translasi T yang anda peroleh pada soal a)
3. Titik $Q(-1, 4)$ diputar 45° searah dengan arah putar jarum jam terhadap titik pusat O . Tentukan bayangan dari titik Q oleh rotasi itu.
4. Titik $P(4, 3)$ diputar terhadap titik $A(1, 2)$ dengan arah perputaran berlawanan arah dengan arah putar jarum jam. Tentukan bayangan titik P , jika besar sudut putarnya
a. $\frac{\pi}{2}$ radian b. π radian
5. Tentukan matriks rotasi yang bersesuaian dengan rotasi – rotasi berikut ini.
a. $[O, \frac{\pi}{2}]$ d. $[O, -\pi]$ g. $[O, \frac{\pi}{6}]$

- b. $[O, -\frac{\pi}{2}]$ e. $[O, \frac{3\pi}{2}]$ h. $[O, -\frac{\pi}{4}]$
6. Tentukan bayangan atau peta dari titik $P(-2, 5)$ oleh rotasi dengan pusat di $(0, 0)$ sejauh $\frac{\pi}{2}$ radian.
7. a. Tentukan matriks rotasi yang bersesuaian dengan rotasi dengan pusat $O(0, 0)$ sejauh $\frac{\pi}{3}$ radian.
b. Dengan menggunakan matriks rotasi yang diperoleh pada soal a), tentukan bayangan atau peta dari titik $P(6, 4)$
8. Tentukan koordinat titik bayangannya, jika titik – titik berikut ini dicerminkan terhadap sumbu X .
a. $A(4, 3)$ b. $C(-3, -5)$
9. Tentukan koordinat titik bayangannya, jika titik – titik berikut ini dicerminkan terhadap sumbu Y .
a. $A(3, 5)$ b. $C(-6, -1)$
10. Tentukan koordinat titik bayangannya, jika titik – titik berikut ini dicerminkan terhadap garis $y = -x$
a. $A(10, 3)$ b. $C(-6, -4)$
11. Tentukan koordinat titik bayangannya, jika titik – titik berikut ini dicerminkan terhadap titik asal $O(0, 0)$
a. $A(12, 4)$ b. $B(-1, -6)$
12. Tentukan koordinat titik bayangannya, jika titik – titik berikut ini dicerminkan terhadap garis $x = 2$
a. $A(1, 2)$ b. $B(5, -1)$
13. Tentukan koordinat titik bayangannya, jika titik – titik berikut ini dicerminkan terhadap garis $y = 3$
a. $A(-3, 4)$ b. $(-4, -5)$
14. Diketahui segitiga ABC dengan koordinat titik – titik sudut $A(5,1)$, $B(3, 4)$ dan $C(1,2)$. Tentukan bayangan dari titik – titik sudut segitiga ABC jika dicerminkan terhadap garis $y = -x$
15. Tentukan koordinat titik bayangan dari titik $P(2, 6)$ oleh dilatasi – dilatasi berikut.
a. $[O, 2]$ b. $[O, -\frac{1}{2}]$
16. Diketahui titik $P(5, 4)$ dan titik $M(1, 2)$. Tentukan bayangan dari titik P oleh dilatasi – dilatasi berikut ini.
a. $[M, 3]$ b. $[M, -\frac{1}{2}]$
17. Titik – titik sudut suatu persegi adalah $A(1, 1)$, $B(2, 1)$, $C(2, 2)$, dan $D(1, 2)$.
a. Carilah peta dari titik – titik sudut persegi itu oleh dilatasi $[O, 2]$
b. Jika peta dari titik – titik $A, B, C,$ dan D itu adalah $A', B', C',$ dan D' , tunjukkan luas persegi $A'B'C'D'$ sama dengan 4 kali luas persegi $ABCD$.

6 – Barisan dan Deret

Pola Bilangan

Pola bilangan adalah aturan terbentuknya sebuah kelompok bilangan.

Kelompok	Pola Bilangan	Pola ke-n
Bilangan Asli	1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, ...	n
Bilangan Genap	2, 4, 6, 8, 10,	2 x n
Bilangan Ganjil	1, 3, 5, 7, 9, 11, ...	2n - 1
Bilangan Persegi	1, 4, 9, 16, ...	n ²
Bilangan Segitiga	1, 3, 6, 10, ...	$\frac{n(n+1)}{2}$
Bil. Persegi Panjang	2, 6, 12, 20,	n(n + 1)
Bil. Segitiga Pascal	$ \begin{array}{c} 1 \\ 1 \quad 1 \\ 1 \quad 2 \quad 1 \\ 1 \quad 3 \quad 3 \quad 1 \end{array} $	2 ⁽ⁿ⁻¹⁾

Barisan/ Deret Aritmetika

Suatu barisan a/ U₁, U₂, U₃,...,U_n atau a, a + b, a + 2b, ..Un disebut barisan aritmetika jika U₂ - U₁=U₃- U₂ dan seterusnya, atau **Un - Un-1 = b**

Suku ke-n barisan aritmetika adalah **Un = a + (n-1) b** atau **Un = Sn - Sn-1** dimana **a =U₁(suku pertama)**, **n=banyaknya suku**, **b=beda = Un-Un-1**

Suku tengah barisan aritmetika

$$U_T = \frac{U_1 + U_n}{2}$$

Jumlah n suku pertama **Sn = n/2 (a + Un)**

atau **Sn = n/2 (2a + (n -1) b)**

Jika suatu deret aritmetika disisipi k bilangan sehingga membentuk deret aritmetika baru,

maka : $b' = \frac{U_n - U_1}{k+1}$

Barisan /Deret Geometri

Suatu barisan a/ U₁, U₂, U₃, .. ,Un atau a, ar, ar², ar³, .., Un disebut barisan geometri jika

$$\frac{U_2}{U_1} = \frac{U_3}{U_2} \text{ dan seterusnya, atau } \frac{U_n}{U_{n-1}} = r$$

Suku ke-n barisan geometri ditentukan oleh :

$$U_n = ar^{n-1}$$

Suku tengahnya adalah $U_T = \sqrt{U_1 \cdot U_n}$

Jumlah n suku pertama $S_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r}$

Jika suatu deret geometri disisipi k bilangan sehingga membentuk deret geometri baru maka,

rasio barunya : $r' = k+1 \sqrt{\frac{U_n}{U_1}}$

Deret Geometri Tak Hingga

Deret geometri tak hingga $a + ar + ar^2 + ... + ar^{n-1} + ...$ dikatakan :

1. mempunyai limit jumlah atau konvergen, jika dan hanya jika $|r| < 1$

Limit jumlah itu ditentukan oleh $S = \frac{a}{1-r}$

2. Tidak mempunyai limit jumlah atau divergen, jika dan hanya jika $|r| > 1$

Latihan

BARISAN ARITMATIKA

1. Carilah suku pertama (a), beda (b), suku ke-6 (u_6) pada tiap barisan berikut ini.
 - a. 2, 4, 6, 8,
 - b. 4, 1, -2, -5,
 - c. 8, 4, 0, -4,
 - d. $1\frac{1}{2}$, 1, $\frac{1}{2}$, 0,
2. Suku pertama sebuah barisan sama dengan 2 sedangkan bedanya sama dengan 5.
 - a. Carilah suku ke-10
 - b. Suku keberapakah yang nilainya 82
3. Suku keempat suatu barisan aritmatika sama dengan 15, sedangkan suku kesepuluh sama dengan 39.
 - a. Carilah suku pertama, beda dan rumus suku ke-n
 - b. Carilah suku ke-20
 - c. Carilah jumlah 20 suku pertama
4. Diketahui barisan aritmatika, suku ketujuh sama dengan 4 kali suku pertama dan suku kelima 6 lebihnya dari suku ketiga. Carilah suku ke-22.
5. Tiga buah bilangan membentuk barisan aritmatika. Jumlahnya 18 dan hasil perkaliannya adalah 192. Carilah bilangan-bilangan itu.
6. Hitung banyak dan jumlah bilangan-bilangan bulat antara 100 dan 1000 yang merupakan kelipatan 7.
7. Ditentukan bilangan asli kurang dari 200. Carilah banyaknya bilangan-bilangan itu yang:
 - a. habis dibagi 4
 - b. habis dibagi 5
 - c. habis dibagi 4 tetapi tidak habis dibagi 5

SISIPAN

8. Diantara bilangan-bilangan 4 dan 28 disisipkan 5 buah bilangan, sehingga bilangan-bilangan semula dengan bilangan-bilangan yang disisipkan itu membentuk barisan aritmatika. Carilah beda dari barisan yang terbentuk.

SUKU TENGAH

9. Suku tengah dari suatu barisan aritmatika sama dengan 19, sedangkan suku terakhirnya sama dengan 34. Jika suku kelima barisan itu sama dengan 16, carilah:
 - a. suku pertama dan beda
 - b. banyaknya suku
10. Diketahui barisan aritmatika 3, 5, 7, 9, ..., 95. Banyaknya suku pada barisan itu ganjil., carilah:
 - a. suku tengahnya
 - b. suku ke berapakah suku tengahnya itu ?
 - c. berapa banyaknya suku barisan itu ?

DERET ARITMATIKA

11. Ditentukan deret aritmatika $4 + 8 + 12 + 16 + \dots$. Carilah:
 - a. rumus suku ke-n
 - b. rumus jumlah suku ke-n
 - c. jumlah 30 suku pertama
12. Hitunglah jumlah tiap deret aritmatika berikut ini.
 - a. $4 + 6 + 8 + \dots$ sampai 40 suku
 - b. $0 + 3 + 6 + \dots + 93$

13. Jumlah n suku pertama suatu deret aritmatika ditentukan dengan rumus $S_n = 4n^2 - 3n$. Carilah suku ke-2n dari deret tersebut.
14. Dalam suatu deret aritmatika suku pertama = 3, suku ke-n = 87, jumlah suku ke-6 dan ke-7 adalah 39. Jika diantara dua suku disisipkan 2 buah suku baru, maka terbentuk deret aritmatika baru. Carilah selisih deret aritmatika baru dengan deret aritmatika semula.

Barisan geometri

1. Carilah suku pertama (a), rasio (r), dan suku kedelapan (u_8) pada tiap barisan geometri berikut ini.
 - a. 1, 3, 9, 27, c. 8, 4, 2, 1,
 - b. 2, -6, 18, -54, d. -24, 12, -6, 3,
2. Suku pertama suatu barisan geometri sama dengan 2, sedangkan suku kelimanya sama dengan 162. Carilah rasio dan rumus suku ke-n (ada 2 kemungkinan jawaban)
3. Suku ketiga dan suku kelima suatu barisan geometri berturut-turut adalah 16 dan 1. Jika rasio barisan ini positif, carilah :
 - a. rasio dan suku pertamanya
 - b. rumus suku ke-n dan suku ke-9
 - c. suku keberapakah yang nilainya $1/256$
4. Tiga buah bilangan membentuk barisan geometri. Jumlah ketiga bilangan itu sama dengan 1728. Carilah bilangan-bilangan itu.
5. Tiga buah bilangan membentuk barisan aritmatika. Jika suku kedua dikurangi dengan 1, maka terbentuk barisan geometri dengan rasio 2. Carilah bilangan-bilangan itu.

Suku Tengah

6. Ditentukan barisan geometri $\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 1, \dots, 256$. Banyaknya suku pada barisan itu adalah ganjil. Carilah :
 - a. suku tengahnya
 - b. suku keberapakah suku tengah itu ?
 - c. berapakah banyaknya suku barisan itu ?

Sisipan

7. Diantara bilangan-bilangan $\frac{1}{4}$ dan 16 disisipkan 5 buah bilangan, sehingga membentuk barisan geometri. Carilah rasio barisan geometri yang terbentuk dan bilangan-bilangan yang disisipkan.
8. Diketahui tiga buah suku barisan geometri 2, 32, 512. Diantara tiap dua suku disisipkan 3 buah suku, sehingga membentuk barisan geometri baru. Tentukan rasio, banyak suku, dan suku ke-8 barisan baru itu.

Deret Geometri

9. Carilah jumlah 6 suku pertama pada tiap deret geometri berikut ini.
 - a. $16 + 8 + 4 + \dots$
 - b. $1 + 4 + 16 + \dots$
 - c. $27 - 9 + 3 - 1 + \dots$
 - d. $-1 + 2 - 4 + \dots$

10. Jumlah deret geometri $2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^n$ sama dengan 254. Carilah nilai n .
11. Jumlah n suku pertama dari suatu deret geometri adalah $S_n = 3^n - 1$.
 - a. Carilah rumus suku ke- n
 - b. Carilah suku pertama dan rasio deret geometri itu.
12. Suatu deret geometri terdiri atas 8 suku. Jumlah 3 suku yang pertama 210 dan jumlah 3 suku yang terakhir 6720. Carilah deret geometri tersebut.
13. Dalam deret geometri, suku pertama = 1 dan rasionya = 2. Carilah nilai n yang bukat dan paling kecil, jika $U_n > 10^9$.
14. Diketahui deret geometri terdiri dari 6 buah suku, dengan suku pertama $2\frac{1}{2}$ dan suku kelima 600 lebihnya dari suku ketiga. Di antara tiap dua suku berurutan disisipkan sebuah suku, sehingga didapat deret geometri baru. Berapakah jumlah deret geometri baru itu yang memiliki rasio positif.
15. Dalam suatu deret geometri ditentukan $S_2 = 9$ dan $S_4 = 45$.
 - a. Carilah suku pertama dan rasio deret geometri tersebut.
 - b. Carilah Jumlah 8 suku pertama.

Deret Geometri Tak Berhingga

16. Jumlah semua suku suatu deret geometri tak berhingga adalah 6, sedang jumlah suku-suku genapnya adalah 2. Tentukan suku pertama deret itu.
17. Sebuah benda bergerak dari keadaan diam dan melintasi 3 dm pada detik pertama, dan pada detik berikutnya bergerak $\frac{2}{3}$ dari lintasan detik sebelumnya. Hitung panjang lintasan yang ditempuh benda sampai berhenti.
18. Diberikan deret geometri :
 ${}^2\log(x-6) + {}^2\log^2(x-6) + {}^2\log^3(x-6) + \dots$
 Tunjukkan bahwa deret itu konvergen pada interval $6\frac{1}{2} < x < 8$.
19. Suku ke- n suatu deret geometri ditentukan oleh $U_n = 2^{n(4+3x-x^2)}$. Carilah batas-batas nilai x agar deret tersebut konvergen.
20. Sebuah bola tenis dijatuhkan dari ketinggian 2 m. Setiap kali memantul bola tersebut akan mencapai ketinggian $\frac{2}{3}$ dari ketinggian sebelumnya. Hitunglah panjang lintasan yang ditempuh bola itu sampai berhenti.

7 – Persamaan, Fungsi, dan Pertidaksamaan Eksponen

Pangkat Bulat Positif, Nol dan Bulat Negatif

$a^n = \underbrace{a \times a \times a \dots \times a \times a \times a}$ perkalian terdiri atas n buah faktor $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ atau $a^n = \frac{1}{a^{-n}}$, dan $a^0 = 1$

Sifat – Sifat Pangkat Rasional

- (i). $a^n \times a^m = a^{n+m}$ (iii). $(a \times b)^n = a^n \times b^n$ (v). $(a^n)^m = a^{nm}$ (ii). $a^n : a^m = a^{n-m}$
 (iv). $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$ (vi). $\left(\frac{a^p}{b^q}\right)^n = \frac{a^{pn}}{b^{qn}}$

Pangkat Pecahan

- i). $a^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a}$ ii). $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$ iii). $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$

catatan: sifat – sifat pangkat rasional sama dengan sifat – sifat pangkat Rasional.

Persamaan Eksponen

Bentuk – bentuk Persamaan Eksponen

A. Bentuk : $a^{f(x)} = a^p$

Jika $a^{f(x)} = a^p$ ($a > 0$ dan $a \neq 1$), maka $f(x) = p$

B. Bentuk : $a^{f(x)} = a^{g(x)}$

Jika $a^{f(x)} = a^{g(x)}$ ($a > 0$ dan $a \neq 1$), maka $f(x) = g(x)$

C. Bentuk : $a^{f(x)} = b^{g(x)}$ ($a > 0$ dan $a \neq 1$, $b > 0$ dan $b \neq 1$, dan $a \neq b$)

Jika $a^{f(x)} = b^{g(x)}$ maka $f(x) = 0$

D. Bentuk : $\{h(x)\}^{f(x)} = \{h(x)\}^{g(x)}$

Jika $\{h(x)\}^{f(x)} = \{h(x)\}^{g(x)}$, maka kemungkinannya adalah

[1.] $f(x) = g(x)$

[2.] $h(x) = 1$

[3.] $h(x) = 0$, asalkan $f(x) = g(x)$ keduanya positif

[4.] $h(x) = -1$, asalkan $f(x)$ dan $g(x)$ keduanya ganjil atau $f(x)$ dan $g(x)$ keduanya genap

E. Bentuk : $A \{a^{f(x)}\}^2 + B \{a^{f(x)}\} + C = 0$

Himpunan penyelesaian dari persamaan eksponen diatas di selesaikan dengan cara mengubah persamaan eksponen itu kedalam persamaan kuadrat, dengan cara memisalkan $y = \{a^{f(x)}\}$

Pertidaksamaan Eksponen

Sifat Fungsi Monoton naik ($a > 1$)

[o]. Jika $a^{f(x)} \geq a^{g(x)}$ maka $a^{f(x)} \geq a^{g(x)}$

[o]. Jika $a^{f(x)} \leq a^{g(x)}$ maka $a^{f(x)} \leq a^{g(x)}$

Sifat Fungsi Monoton naik ($a < 1$)

[o]. Jika $a^{f(x)} \geq a^{g(x)}$ maka $a^{f(x)} \leq a^{g(x)}$

[o]. Jika $a^{f(x)} \leq a^{g(x)}$ maka $a^{f(x)} \geq a^{g(x)}$

Fungsi Eksponen

Fungsi Eksponen dengan bilangan pokok atau basis a adalah fungsi yang mempunyai bentuk umum:

$$f : x \rightarrow a^x \text{ atau } y = f(x) = a^x$$

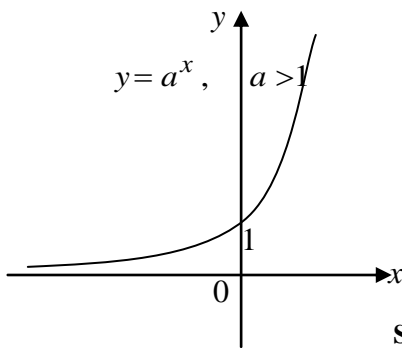
- a disebut bilangan pokok atau basis $a > 0$ dan $a \neq 1$
- Peubah x dinamakan peubah bebas atau variabel bebas.

Grafik Fungsi Eksponen

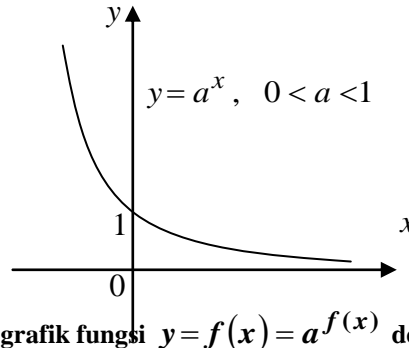
Grafik Fungsi Eksponen dikelompokkan menjadi dua macam.

[o]. Grafik Fungsi Eksponen dengan basis $a > 1$

[o]. Grafik Fungsi Eksponen dengan basis $0 < a < 1$



$a > 1$



$a < 0 < 1$

Sifat grafik fungsi $y = f(x) = a^{f(x)}$ dengan:

- (i). Fungsi monoton naik
- (ii). Memotong sumbu Y dititik $(0, 1)$
- (iii). Sumbu X sebagai asimtot datar
- (iv). Merupakan fungsi bijektif
- (v). Daerah hasil selalu bernilai positif untuk semua $x \in R$

- (i). Fungsi monoton turun
- (ii). sama
- (iii). sama
- (iv). sama
- (v). sama

Latihan

1. Tentukan himpunan penyelesaian setiap persamaan eksponen berikut.

a. $3^{x-4} = 1$ c. $\sqrt{8^{x-1}} = \sqrt[3]{\frac{1}{4}}$
 b. $2^{3x-1} = 32$ d. $3 \cdot \sqrt{\left(\frac{1}{27}\right)^{2x-1}} = \sqrt{243}$

2. Tentukan himpunan penyelesaian setiap persamaan eksponen berikut.

a. $9^{x-2} = \left(\frac{1}{3}\right)^{x^2-4x+1}$
 b. $10^{x^2-1} = \sqrt{(100)^{x^3-4x^2+6x-1}}$

3. Tentukan himpunan penyelesaian setiap persamaan eksponen berikut.

a. $2^{3x-6} = 3^{3x-6}$
 b. $3^{x^2-6x-8} = 5^{x^2-6x+8}$

4. Tentukan himpunan penyelesaian setiap persamaan eksponen berikut.

a. $(x^2-3x+1)^{2x-1} = (x^2-3x+1)^{x+5}$
 b. $(2x-5)^{x^2-4} = (2x-5)^{-2x+11}$

5. Tentukan himpunan penyelesaian persamaan eksponen:

$$(x-8)^{x^2-2x-15} = 1$$

6. Tentukan himpunan penyelesaian dari setiap persamaan eksponen berikut ini.

a. $2^{2x} - 12 \cdot 2^x + 32 = 0$
 b. $10^{2x} - 9 \cdot 10^x - 10 = 0$
 c. $5^{2x+1} - 6 \cdot 5^x + 1 = 0$
 d. $3^{2x} + 3^{-2x+5} - 36 = 0$

7. Tentukan penyelesaian dari setiap pertidaksamaan eksponen berikut.

a. $4^x > 8$
 b. $(\sqrt{3})^{5x} > 9^{3x+7}$
 c. $6^{x^2+4x-3} < 36$
 d. $(\sqrt{5})^{x^3} < 25^{x^2-\frac{3}{4}x}$

8. Tentukan penyelesaian dari setiap pertidaksamaan berikut.

a. $\left(\frac{1}{2}\right)^{x+1} > \left(\frac{1}{4}\right)^{2x+4}$
 b. $\left(\frac{1}{9}\right)^{x+2} < \left(\frac{1}{27}\right)^{\frac{1}{3}x^2+\frac{1}{3}}$

9. Tentukan penyelesaian dari setiap pertidaksamaan berikut.

a. $2^{2x} - 5 \cdot 2^x + 4 \leq 0$
 b. $9^x - 26 \cdot 3^x - 27 > 0$
 c. $2^{-2x+5} - 65 \cdot 2^{-x} + 2 < 0$
 d. $5^{-2x+2} + 74 \cdot 5^{-x} - 3 \geq 0$

10. Tentukan himpunan penyelesaian persamaan eksponen dibawah ini:

a. $\sqrt[4]{3\sqrt{\sqrt{b^x}}} \cdot \sqrt[6]{b^{2x}} = b^x \cdot b^{-3}$
 b. $\frac{2^x}{8^{x+2}} = 64 \cdot \sqrt{2^{3x}} \cdot \sqrt{8^{3x}}$
 c. $(27)^{\frac{1}{x+2}} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{x+1}} = \left(\frac{1}{81}\right)^{\frac{-1}{3+2x}}$
 d. $\frac{4}{5}(2^{3x-2}) + \frac{8^x}{20} = 1$

11. Tentukan himpunan penyelesaian persamaan eksponen dibawah ini

$$(x^2 - 2x - 1)^{2x-1} = (x^2 - 2x - 1)^{7-x}$$

12. Tentukan himpunan penyelesaian persamaan eksponen dibawah ini:

a. $3^{x^2-3x+2} + 3^{x^2-3x} = 0$
 b. $4^{x+\frac{1}{2}} - 2^{x+3} = 8 + 7(2^x)$

13. Tentukan himpunan penyelesaian persamaan dibawah ini

a.
$$\begin{cases} \frac{6^{3x-y-1}}{2^{3x-y}} = 4\frac{1}{2} \\ 5^{x-y} + 5^{y-x-1} = 1\frac{1}{5} \end{cases}$$

b.
$$\begin{cases} 3^{2(9x-y-2)} - 10 \cdot 3^{9x-y-1} + 81 = 0 \\ 8x - y - 4 \end{cases}$$

14. Tentukan himpunan penyelesaian pertidaksamaan eksponen berikut.

a. $3^{2x-2} - 4 \cdot 3^x + 3^3 > 0$
 b. $5^{x+1} + \frac{2}{5^x} - 7 < 0$

Latihan 2

1. Carilah semua nilai x yang memenuhi persamaan:

a. $\left(\sqrt[3]{5^{2x+3}}\right)^2 = 125^{2x-4}$
 b. $\frac{1}{8} \cdot 4^{2x-3} = \left(\frac{\sqrt{2}}{8}\right)^{-x}$

c. $(27)^{\frac{1}{x+2}} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{x+1}} = \left(\frac{1}{81}\right)^{\frac{1}{3+2x}}$

2. Carilah semua nilai x dan y yang memenuhi sistem persamaan :

$$\begin{cases} 2^{x-2y+1} = 4 \\ 3^{2x+3y+3} = 27^{x+y} \end{cases}$$

3. Tentukan himpunan penyelesaian persamaan eksponen berikut ini.

a. $(2x^2 + 5x - 3)^{2x+3} = (2x^2 + 5x - 3)^{-x+3}$

b. $(2x - 5)^{x^2-4} = (2x - 5)^{-2x+11}$

4. Tentukan himpunan penyelesaian persamaan eksponen berikut.

a. $3125 - 4.5^{x+1} - 5^{2x-2} = 0$

b. $\frac{1}{3^{2x}} - \frac{12}{3^x} + 27 = 0$

c. $3^{2(9x-y-2)} - 10.3^{9x-y-1} + 81 = 0$

d. $\begin{cases} 8x - y - 4 \\ 6^{3x-y-1} \\ 2^{3x-y} = 4\frac{1}{2} \end{cases}$

d. $\begin{cases} 5^{x-y} + 5^{y-x-1} = 1\frac{1}{5} \end{cases}$

5. Tentukan himpunan penyelesaian pertidaksamaan eksponen berikut:

a. $2^{x+2} + 4^{x+1} < 480$

b. $(5^{x-1} - 2)(5^{x-1} - 4) < 3$

c. $4^x - 3.2^{x+2} + 4^{-x} - 3.2^{-x+2} + 34 < 0$

6. Dari rumus $H = \frac{v^3 d^{\frac{2}{3}}}{120}$, diberikan H = 1200 dan d =

1728. Tentukan nilai v

7. Tentukan nilai dari $\frac{a^{\frac{2}{3}} + 4a^{-1} - 5a^0}{b^{\frac{2}{3}} + 3b^{-1} - 2b^0}$, untuk a = 4 dan

$$b = \frac{1}{8}$$

8. Tentukan bentuk sederhana dari :

a. $\left(\frac{\sqrt{ab}}{b^4\sqrt{a}}\right)^{\frac{1}{3}} \times \left(\frac{b}{a^3\sqrt{b}}\right)^{\frac{1}{4}} ; \left(\frac{a}{\sqrt[3]{a^2b^2}}\right)^{\frac{1}{2}}$

b. $\frac{\left(\frac{a^n}{a^m}\right)^m \times \left(\frac{a^m}{a^n}\right)^m}{(a^n)^n \times a^{m^2} \times (a^m)^n \times (a^n)^m}$

c. $\frac{(w^{n+2})^2 \times (w^2)^{2n-2}}{w^n : w^{n-3}}$

9. Tentukanlah nilai a, b, c, d dari :

a. $\frac{(30^2)^4 \times 49^6}{28^5 \times 96^2 \times 625^2} = 2^a . 3^b . 5^c . 7^d$

b. $\frac{75^4 \times \left(\frac{15}{16}\right)^4}{\left(\frac{3}{4}\right)^5 \times 12^3} = 2^a . 3^b . 5^c$

10. Tentukan nilai $\frac{q}{pr}$ yang memenuhi

$$\sqrt[3]{\sqrt{256}} \times \sqrt[5]{729\sqrt{x^3}} = 2^p . 3^q . x^r$$

8 – Persamaan, Fungsi, dan Pertidaksamaan Logaritma

Definisi: Logaritma bilangan

Misalkan a adalah bilangan positif ($a > 0$) dan g adalah bilangan positif yang tidak sama dengan 1 ($0 < g < 1$ atau $g > 1$).

$${}^g \log a = x \text{ jika dan hanya jika } g^x = a$$

- * g disebut bilangan pokok atau basis logaritma
- * a disebut numerus, yaitu bilangan yang dicari logaritmanya
- * x disebut hasil logaritma

Sifat – sifat Dasar Logaritma

$$(i). {}^g \log g^n = n \quad (ii). {}^g \log g = 1 \quad (iii). {}^g \log 1 = 0$$

Sifat – sifat Logaritma

$$(a). {}^g \log(a \times b) = {}^g \log a + {}^g \log b \quad (e). (i). {}^g \log a \times {}^a \log b = {}^g \log b$$

$$(b). {}^g \log\left(\frac{a}{b}\right) = {}^g \log a - {}^g \log b \quad (ii). {}^{g^n} \log a^m = \frac{m}{n} {}^g \log a$$

$$(c). {}^g \log a^n = n \times {}^g \log a \quad (iii). {}^{g^n} \log a^n = {}^g \log a$$

$$(d). (i). {}^g \log a = \frac{{}^p \log a}{{}^p \log g} \quad (f). g^{{}^g \log a} = a$$

$$(ii). {}^g \log a = \frac{1}{{}^a \log g}$$

Persamaan Logaritma

Persamaan logaritma adalah persamaan yang numerusnya mengandung peubah x dan tidak menutup kemungkinan bilangan pokoknya juga mengandung peubah x .

Bentuk – bentuk persamaan Logaritma.

A. Bentuk : ${}^a \log f(x) = {}^a \log p$

Jika ${}^a \log f(x) = {}^a \log p$ maka $f(x) = p$ asalkan $f(x) > 0$

B. Bentuk : ${}^a \log f(x) = {}^b \log f(x)$

Jika ${}^a \log f(x) = {}^b \log f(x)$ (dengan $a \neq b$), maka $f(x) = 1$

C. Bentuk : ${}^a \log f(x) = {}^a \log g(x)$

Jika ${}^a \log f(x) = {}^a \log g(x)$ maka $f(x)$ dan $g(x)$ keduanya positif

D. Bentuk : ${}^{h(x)} \log f(x) = {}^{h(x)} \log g(x)$

Jika ${}^{h(x)} \log f(x) = {}^{h(x)} \log g(x)$ maka $f(x) = g(x)$ asalkan $f(x)$ dan $g(x)$ keduanya positif serta $h(x) > 0$ dan $h(x) \neq 1$

E. Bentuk: $A \{^a \log x\}^2 + B \{^a \log x\} + C = 0$

Himpunan penyelesaian dari persamaan logaritma diatas di selesaikan dengan cara mengubah persamaan logaritma itu kedalam persamaan kuadrat, dengan cara memisalkan $y = \{^a \log x\}$

Pertidaksamaan Logaritma

Sifat Fungsi logaritma Monoton naik ($a > 1$)

[o]. Jika $^a \log f(x) \geq ^a \log g(x)$ maka $f(x) \geq g(x)$

[o]. Jika $^a \log f(x) \leq ^a \log g(x)$ maka $f(x) \leq g(x)$

Sifat Fungsi logaritma Monoton turun ($0 < a < 1$)

[o]. Jika $^a \log f(x) \geq ^a \log g(x)$ maka $f(x) \leq g(x)$

[o]. Jika $^a \log f(x) \leq ^a \log g(x)$ maka $f(x) \geq g(x)$

Fungsi Logaritma

Fungsi logaritma dengan bilangan pokok atau basis a adalah fungsi yang mempunyai bentuk umum:

$$y = f(x) = ^a \log x$$

* a disebut bilangan pokok atau basis $a > 0$ dan $a \neq 1$

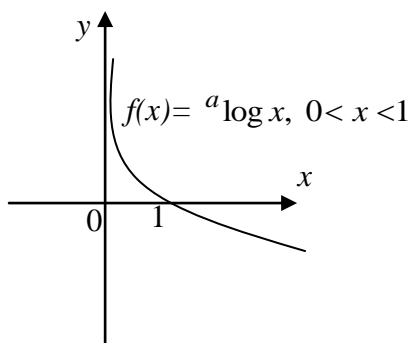
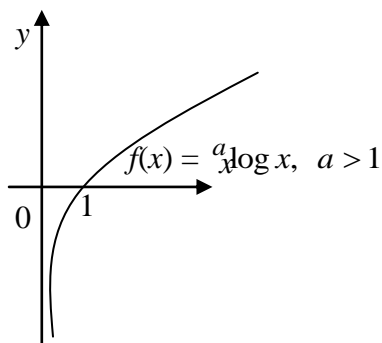
* Peubah x dinamakan numerus (yang dicari nilai logaritmanya)

Grafik Fungsi logaritma

Grafik Fungsi logaritma dikelompokkan menjadi dua macam.

[o]. Grafik Fungsi logaritma dengan basis $a > 1$

[o]. Grafik Fungsi logaritma dengan basis $0 < a < 1$



Sifat grafik fungsi $y = f(x) = ^a \log x$ dengan:

- | | |
|---|---|
| <p>$a > 1$</p> <ul style="list-style-type: none"> (i). Fungsi monoton naik (ii). Memotong sumbu Y dititik (1, 0) (iii). Sumbu Y sebagai asimtot tegak (iv). Merupakan fungsi bijektif (v). Daerah hasil semua $x \in R$ | <p>$a < 0 < 1$</p> <ul style="list-style-type: none"> (i). Fungsi monoton turun (ii). sama (iii). sama (iv). sama (v). sama |
|---|---|

Latihan

- Tentukan himpunan penyelesaian dari tiap persamaan logaritma berikut ini.
 - ${}^2\log(x-4) + {}^2\log(x-6) = 3$
 - ${}^2\log(x-5) + {}^2\log(x-2) = {}^9\log 81$
- Tentukan himpunan penyelesaian dari setiap persamaan logaritma berikut.
 - $\log\{\log(3x+4) + 2\} = \log \log 4x$
 - ${}^7\log\{\log x^5 + 14\} = {}^7\log\left(\log \frac{x^2}{10}\right)$
 - ${}^2\log\{\log(2^{x+1} + 81)\} = 1 + {}^2\log x$
- Tentukan himpunan penyelesaian dari setiap persamaan logaritma berikut.
 - $\log(x-1) = -\log 3$
 - $\log x = \log 3 + \log(x+6)$
 - ${}^2\log x = {}^2\log({}^2\log 2\sqrt{2}) + 1$
- Tentukan himpunan penyelesaian dari setiap persamaan logaritma berikut.
 - $\log(x-10) + \log(x-9) = 1 + \log 2$
 - $\log \log x = \log(\log x + 12) - \log 5$
 - $6^{-x} \log(x^3 - 3x^2 + x - 6) = 1$
- Tentukan himpunan penyelesaian dari setiap persamaan logaritma berikut.
 - $\frac{1}{2^{x-1} \log x} + \frac{1}{x+6 \log x} = \frac{1}{x+10 \log x} + 1$
 - $x^{+13} \log(x-1) - \frac{1}{x+13} \log 8 = \frac{\log^2 5 - \log^2 2}{\log 2,5}$
- Tentukan himpunan penyelesaian tiap dari setiap persamaan logaritma berikut ini:
 - ${}^5\log^2 x - {}^5\log x^4 + {}^5\log 125 = 0$
 - $\log^2 x + 5^{\log 30 - \log 3} = \log x^6 + 25^{\log \sqrt{5}}$
dengan bilangan pokok logaritma 5.
 - $x^2 \log x = \frac{x^4}{8}$
 - ${}^2\log x^{1+2\log x} = 6$
- Tentukan penyelesaian dari setiap pertidaksamaan berikut.
 - $4\left(\frac{1}{2} \log x\right) < {}^2\log 81$
 - $\frac{1}{2} \log(x^2 + 4x + 4) < -2$
 - $\frac{1}{2} \log\left(\frac{1}{\sqrt{16}}(x^2 - 10x + 1)\right) < 4$
- Tentukan penyelesaian dari setiap pertidaksamaan berikut.
 - $({}^2\log x)^2 - 2\frac{1}{2} {}^2\log x + 1 < 0$
 - $({}^5\log x)^2 - 2 \cdot {}^5\log x - 3 \geq 0$
- Tentukan penyelesaian dari setiap pertidaksamaan berikut.
 - $2^{x-1} \log 2 < 1$
 - ${}^x\log(3x-1) \geq {}^x\log x$
 - $1-2^x \log x < 1-2^x \log(3-4x)$
- Jumlah penduduk di suatu kota pada tahun 2000 sebanyak 1,4 juta orang. Persentase pertambahan penduduk di kota itu sebesar 5% pertahun dan persentase pertambahan ini bernilai tetap. Pada tahun keberapa (setelah tahun 2000) jumlah penduduk kota itu menjadi 2,1 juta orang?
- Ali menyimpan uang di Bank sebesar Rp5.000.000,00 dengan aturan tingkat bunga majemuk $p\%$ per tahun. Tingkat bunga ini tetap dan perhitungan bunga dilakukan setiap tahun. Pada tahun kelima, jumlah uang disimpan Ali menjadi Rp8.052.550,00. Berapa besar tingkat bunga pertahun yang diberikan oleh pihak bank?
- Besar arus transien pada sebuah rangkaian RC ditentukan oleh rumus: $I = I_0 e^{-\frac{t}{\tau}}$ dengan $\tau = RC$ disebut tetapan waktu atau waktu RC (*time constant*). Besar arus semula adalah $I_0 = 100$ ampere dan ketika mengalir di dalam rangkaian RC selama 10 detik besar arus menjadi $I = 1$ ampere. Hitunglah nilai tetapan waktu τ pada rangkaian RC itu.
- Misalkan semula terdapat masa isotop radioaktif ${}^{14}\text{C}$ sebanyak M_0 gram dan isotop radioaktif ${}^{14}\text{C}$ mempunyai waktu paruh 5.600 tahun.
 - Nyatakan masa isotop radioaktif ${}^{14}\text{C}$ yang tersisa sebagai fungsi dari n waktu paruh.
 - Nyatakan masa isotop radioaktif ${}^{14}\text{C}$ yang tersisa sebagai fungsi waktu t
 - Dalam waktu berapa tahun masa yang tersisa sama dengan 75% dari masa semula
- Tentukan himpunan penyelesaian persamaan eksponen dibawah ini:
 - $2 \cdot \log 5 + \log(x+1) = 1 + \log(2x+7)$
 - $\log(6 \cdot 5^x - 25 \cdot 20^x) + x + \log 25$
 - ${}^{16}\log(85x+1) = {}^2\log(x+1)$
- Tentukan himpunan penyelesaian persamaan eksponen dibawah ini
 - $\log\left(1 + \frac{15}{x}\right) = 2\left({}^x\log 10 - 1\right)$

$$b. {}^{(x+3)}\log(2x+1) + \frac{1}{(x-1)\log(x+3)} = 2$$

17. Tentukan himpunan penyelesaian persamaan eksponen dibawah ini:

$$a. {}^2\log(9^{x-1} + 7) = 2 + {}^2\log(3^{x-1} + 1)$$

$$b. (\log x)^2 + 5^{\log 30 - \log 3} = \log x^6 + 25^{\log \sqrt{5}},$$

dengan bilangan pokok 5

$$c. 10^{\log^2 x} + 10x^{-\log x} - 1 = x^{\frac{1}{\log x}}$$

18. Tentukan himpunan penyelesaian persamaan dibawah ini

$$a. \begin{cases} 2^x : 4^{7y} = 8 \\ {}^3\log x - {}^3\log 5 = {}^3\log(y+1) + {}^3\log 2 \end{cases}$$

19. Tentukan himpunan penyelesaian pertidaksamaan logaritma berikut.

$$a. {}^{0,1}\log(x^2 - 5x + 4) > -1$$

$$b. {}^5\log(2x-1) - {}^{2x-1}\log 625 \geq 0$$

$$c. {}^x\log(2x-7) < 1$$